FILOZOFIA I NAUKA
Studia filozoficzne i interdyscyplinarne
Tom 2, 2014

Jarosław Mrozek[1]
Instytut Filozofii, Socjologii i Dziennikarstwa
Uniwersytetu Gdańskiego

MATEMATYKA W UJĘCIU MOCNEGO PROGRAMU SOCJOLOGII WIEDZY

STRESZCZENIE

Socjologia wiedzy głosi tezę o społecznej naturze wszelkiej wiedzy, jednak w twórczości najwybitniejszego przedstawiciela tego sposobu myślenia, Karla Mannheima pojawia się niekonsekwencja wyrażająca się skłonnością do odmiennego traktowania matematyki i logiki. Mannheim rozważał matematykę i logikę jako dziedziny wiedzy nie podlegające społecznej determinacji. Przedstawiciele mocnego programu socjologii wiedzy na nowo podejmują problem statusu matematyki i logiki. Chcą pokazać, że również te nauki można zasadnie i sensownie analizować, odwołując się do narzędzi socjologicznych. W swych rozważaniach nawiązują do poglądów Ludwiga Wittgensteina i Imre Lakatosa. W szczególności są przekonani, że dzieła Ludwiga Wittgensteina *Remarks on the Foundations of Mathematics* i Imre Lakatosa *Proofs and Refutations* otwierają drogę socjologicznemu podejściu do matematyki.

Słowa kluczowe: mocny program, Karl Mannheim, Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos, matematyka.

STATUS MATEMATYKI WEDŁUG SOCJOLOGII WIEDZY

Socjologia wiedzy zajmuje się społecznymi uwarunkowaniami różnych form wiedzy ludzkiej, a także jej społecznymi funkcjami. Częścią socjologii wiedzy jest socjologia nauki. Filozoficzni prekursorzy i pionierzy socjologii wiedzy wypowiadali się tak, jak gdyby naczelną tezę socjologii wiedzy – o społecznym uwarunkowaniu wiedzy – odnosili również do wiedzy naukowej, w szczególności nauki w sensie *science*.

Max Scheler, który w 1924 r. pierwszy użył pojęcia wyrażenia „socjologia wiedzy”, mówił o „społecznej naturze w s z e l k i e j wiedzy”. Podobnie Émile Durkheim głosił tezę o społeczno-historycznym uwarunkowaniu podstawowych kategorii pojęciowych i reguł myślenia.

[1] Adres Autora: e-mail: filjam@univ.gda.pl; Instytut Filozofii, Socjologii i Dziennikarstwa Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Bażynskiego 4, 80-952 Gdańsk.

Najbardziej znany system socjologii wiedzy Karla Mannheima nawiązuje do myśli marksistowskiej, uwzględniając wpływy fenomenologii i neokantyzmu. Dzieło Mannheima *Ideologia i Utopia*[2] zostało odczytane jako próba podważenia sięgającej czasów platońskich dystynkcji pomiędzy *episteme* i *doxa,* a tym samym, jako atak na podstawy epistemologii. Według Mannheima sytuacja społeczna podmiotu wpływa w sposób nieusuwalny na strukturę i treść jego poglądów. Nie można zrozumieć – twierdzi Mannheim – w pełni sensu czyichś twierdzeń, jeśli bada się jedynie ich czystą treść, nie uwzględniając jej społecznego kontekstu. Mannheim stawia tezę, że społeczna geneza poglądów nie ma znaczenia jedynie historycznego wpływa, a wpływa na ich treść i formę.

Społecznym uwarunkowaniom mają podlegać wszystkie typy wiedzy, ale Mannheim podnosząc problem statusu logiki i matematyki staje się niekonsekwentny. Traktuje on nauki ścisłe i przyrodnicze jako przypadek szczególny – nie podpadający pod tezę o społecznej determinacji wiedzy. Fundamentalne założenia socjologicznego ujęcia wiedzy nie dawały podstaw do szczególnego traktowania nauk przyrodniczo-matematycznych i logiki. Jeżeli Mannheim zatrzymał się w swych poczynaniach u granic nauk ścisłych i formalnych, to uczynił tak wbrew założeniom i logice własnej doktryny. Inaczej mówiąc, specjalny status nauk ścisłych i formalnych ma u Mannheima sankcję społeczną raczej niż merytoryczną, jest bardziej ustępstwem na rzecz obiegowej opinii niż spójną częścią jego doktryny.

Aby zilustrować ową niekonsekwencję, rozważmy (za Davidem Bloor'em[3]) dwa problemy. Po pierwsze, zapytajmy, dlaczego matematyk jako matematyk twierdzi coś lub dokonuje takich a nie innych operacji w ramach swojej działalności zawodowej. W tym przypadku poszukujemy odpowiedzi w samej dziedzinie matematyki. Postępowanie matematyka jest determinowane przez strukturę obiektów matematycznych i ich powiązań, które właśnie on bada. Sformułowanie twierdzenia lub wykonywanie tych a nie innych działań przez matematyka jest logiczną konsekwencją przyjętych założeń i uznawanych reguł inferencji. Po drugie, rozważmy problem należący do sfery pozamatematycznej, na przykład spróbujmy odpowiedzieć, dlaczego matematyk został właśnie matematykiem, a nie wybrał jakiejś innej specjalności. Odpowiadając na to pytanie, nie musimy odwoływać się do logicznych czy matematycznych praw, lecz między innymi do perspektyw zawodowych czy zarobkowych, do zainteresowań zaszczepionych przez nauczyciela, do upodobań, tradycji rodzinnych, ambicji osobistych itp. Zatem okazuje się, że proces selekcji do zawodu, czynniki sprzyjające lub hamujące wybór zawodu matematyka nie mają wiele wspólnego z samą matematyką, natomiast poddają się analizie socjologicznej.

---

[2] K. Mannheim, *Ideology and Utopia*, Routledge & Kegan Paul, London 1936.

[3] D. Bloor, *Wittgenstein i Mannheim o socjologii matematyki*,w: B. Barnes, D. Bloor (red.), *Mocny program socjologii wiedzy*, Wyd. IFiS PAN, Warszawa 1993, s. 41–42.

Opisana sytuacja sugeruje, że socjolog nie ma nic do powiedzenia na temat tego, co odbywa się wewnątrz matematyki. Gdy poczynania matematyka są prawidłowe, wystarczy, że ich uzasadnienie odwołuje się do logiki rozumowania. Wygląda na to, że przedmiot matematyki leży poza zainteresowaniem socjologa. Socjolog będzie mógł zabrać głos, gdy w działalności matematyka pojawią się błędy (złe rozumienie kwestii, niekonsekwencje, niekompetencje). Przyczyn tego typu błędów mógłby on poszukiwać w niedostatecznym lub niepełnym wykształceniu, czy zaniedbaniu ćwiczeń. Okazuje się więc, że wyjaśnienia poczynań wewnątrz matematyki radykalnie różnią się od wyjaśnień odnoszących się do zachowań poza matematyką. Pierwsze odwołują się do wewnętrznej racjonalności dziedziny matematyki, drugie odwołują się do pozamerytorycznych czynników psycho-społecznych.

Stanowisko Mannheima w odniesieniu do matematyki można w dużym uproszczeniu sformułować następująco: prawdziwe matematyczna przekonania, właściwe postępowanie matematyczne tłumaczy się mocą wewnętrznej logiki rozumowań matematycznych, natomiast fałszywe poglądy, niewłaściwe operacje wymagają wyjaśnień odwołujących się do procesów społecznych (uwzględniających czynniki historyczne, kulturowe i psychologiczne). Takie podejście presuponowane jest przez realistyczną wizję matematyki, której konsekwencją jest pogląd, że logika i matematyka są tak dalece bezosobowe i obiektywne, że analiza socjologiczna ich „zawartości" wydaje się niemożliwa.

MOCNY PROGRAM A MATEMATYKA

Autorzy mocnego programu[4] na nowo podejmują problem statusu matematyki i logiki w ramach socjologii wiedzy. W swoich rozważaniach nawiązują do koncepcji filozofii nauki, które dokonały zwrotu od logicznych do historyczno-społecznych modeli wyjaśniania nauki i jej rozwoju (Thomasa Kuhna, Paula Feyerabenda i Stephena Toulmina). Według Barry'ego Barnesa i Bloora w klasycznej filozofii nauki usiłuje się absolutyzować zasady epistemologiczne, które mają względną wartość i są wyrazem jednego z wielu etapów rozwoju świadomości metanaukowej. Twórcy mocnego programu twierdzą, że klasyczna epistemologia jest sferą fałszywej świadomości. Fałszywość klasycznej epistemologii polega na głoszeniu, że zajmuje się ona badaniem jakoby obiektywnych źródeł poznania czy koniecznych warunków prawdziwości. Tymczasem to, co epistemolodzy czynią – uważają przedstawiciele szkoły edynburskiej[5] – to badanie reguł racjonalności obowiązujących w ich własnej kulturze, przy jednoczesnym przeświadczeniu, że badają reguły konieczne i ponadczasowe, a także niezbywalne.

[4] B. Barnes, D. Bloor (red.), *Mocny program socjologii wiedzy*, op. cit.
[5] Mocny program socjologii wiedzy rozwijali od lat 70-tych XX wieku uczeni z Edynburga.

Rewizja wyidealizowanych wyobrażeń o racjonalności nauki doprowadziła zwolenników mocnego programu do traktowania epistemologicznej kategorii racjonalności jako wytworu określonych uwarunkowań społecznych. W szczególności mocny program wyróżnia próba scharakteryzowania, a może nawet wyjaśnienia istoty nauk matematyczno-przyrodniczych poprzez odwołanie się do kategorii socjologicznych. Jego przedstawiciele uważają, że potraktowanie nauki jako jednego z równorzędnych elementów kultury nie doprowadzi do irracjonalizmu, lecz dowartościuje różne typy *wewnętrznej racjonalności* charakteryzującej różnorodne zjawiska społeczno-kulturowe.

Mocny program socjologii wiedzy chce konsekwentnie zrealizować program socjologii wiedzy. Ta konsekwencja polegać ma na poszukiwaniu społecznych uwarunkowań wszelkich form wiedzy, a więc w szczególności matematyki i logiki. Wymaga to odmiennego „spojrzenia" na status poznawczy tych nauk, a w szczególności porzucenia realistycznego (i teleologicznego) pojmowania matematyki. W tym względzie twórcy Mocnego Programu zwracają się ku poglądom Ludwiga Wittgensteina zawartych w jego *Remarks*.[6]

SPECYFIKA MATEMATYKI W *REMARKS ON THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS* WITTGENSTEINA

Remarks Wittgensteina są zbiorem luźnych fragmentów poświęconych podstawom matematyki. Nie są w nich jednak rozważane systemy aksjomatyczne i nie poszukuje się „logicznych fundamentów" matematyki; Wittgenstein ogranicza się do rozważania elementarnych operacji arytmetycznych i dyskusji nad stosowaniem wzorów. Większość *Remarks* jest o dodawaniu. Nie o dodawaniu dużych liczb, ale po prostu o dodawaniu 1 (jedynki). Wittgenstein nie zajmuje się odejmowaniem ani mnożeniem. Co więcej, wcale nie chce uzasadnić dodawania – wręcz przeciwnie. Dążąc do maksymalnej opozycji wobec realizmu matematycznego, zaprzecza on logicznej konieczności schematu dodawania. Nawet wyliczanie jest „obalalne" czy podważalne. Wittgenstein mówi, że pytanie o kontynuację: 1, 2, 3, 4 ...???? „czasami" może mieć odpowiedź: 1, 2, 3, 4, 100 (sic!). Reguły wyliczania i dodawania są dla Wittgensteina jedynie zwyczajem i przyzwyczajeniem, „sposobem, w jaki to robimy". Jeśli ktoś inny robi to inaczej, to nie ma sposobu rozstrzygnięcia, kto ma rację, a kto nie. Okazuje się, że kontekst, który kształtuje schematy działań arytmetycznych, należy do przekazu społecznego, a reguły kalkulacji są arbitralne.

Aby pokazać dokładniej, na czym polega podejście do matematyki prezentowane przez Wittgensteina, przeanalizujmy typowy dla niego przykład rozwijania ciągu liczb według zadanej reguły. Niech to będzie

[6] L. Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Blackwell, Oxford 1956.

ciąg[7] liczb parzystych: 2, 4, 6, 8, ..., regułą postępowania w tym przypadku jest w każdym kroku dodanie 2, czyli „+2”. Problemem, który „dręczy” Wittgensteina, jest pytanie: jaki jest efekt stosowania tej reguły? Dla realisty matematycznego sprawa jest prosta, gdyż istnieje arytmetyczny „pierwowzór”, któremu odpowiada poprawna kontynuacja ciągu: 2, 4, 6, 8, ..., a kierowanie się regułą „+2” jest podążaniem za czymś istniejącym „z góry”. Wydaje się, że wszystko jest jasne, lecz Wittgenstein zadaje niepokojące pytania: co sprawia, że na poszczególnych etapach kierowania się regułą różne kroki są identyczne? I w związku z tym, jakie naprawdę rozwinięcie ma reguła? Według Wittgensteina „pierwowzór arytmetyczny”, nawet istniejący, jest w tym przypadku bezużyteczny, gdyż po prostu nikt nie ma do niego dostępu (nikt aktualnie nie postrzega całego ciągu liczb parzystych). Ale, zauważa Wittgenstein, nawet gdyby ludzie mieli dostęp do prawdziwego ciągu liczb i znali „pierwowzór”, to skąd mogliby wiedzieć, że jest on istotnie poprawnym ucieleśnieniem reguły „+2”. Żeby stwierdzić czy „pierwowzór” jest poprawny, trzeba wcześniej wiedzieć, jakie rozwinięcie ma reguła, a przypomnijmy, że odpowiedzią na pytanie: „jakie rozwinięcie ma reguła?” było właśnie odwołanie się do istniejącego realnie i obiektywnie zbioru liczb, w ramach którego „istnieje” ciąg liczb parzystych. Wittgenstein w ten sposób wskazuje na istotną wadę realizmu matematycznego, która dotyczy nie tyle metafizyki (założenia obiektywnego istnienia bytów matematycznych takich jak liczby naturalne), ile uwikłania epistemologii realizmu matematycznego w *circulus vitiosus*. Założeniem jest to, co dopiero ma być wyjaśnione.

Twórcy mocnego programu wskazują na podobne trudności związane z uzasadnieniem pewnych reguł logiki, które racjonaliści chcieliby widzieć jako uniwersalne i niezależne od kontekstu. Jako przykład pojawia się reguła *modus ponens*: „jeśli p oraz ‘jeżeli p to q’ a zatem q”.[8] Barnes i Bloor wskazują, że gdyby komuś ta reguła nie wydała się być „nie odpartą” i ten ktoś zażądałby uzasadnienia tego kroku, to racjonalista byłby w kłopocie. Wyjściem mogłoby być sformułowanie pewnej metareguły, która brzmiałaby następująco: „jeżeli masz dane < z ‘p’ i ‘p→q’ wynika ‘q’>, to teraz mając ‘p’ jak i ‘p→q’ wyprowadzasz wniosek ‘q’”. Trzeba jednak zauważyć, że podana metareguła odwołuje się do tego samego schematu rozumowania, którego miała być uzasadnieniem. Uzasadnienia dedukcji same zakładają dedukcję.[9] Popadają w błędne koło, ponieważ odwołują się do tych samych zasad wnioskowania, które mają uzasadnić.

[7] Rozwijanie serii liczb służy Wittgensteinowi za reprezentatywny przypadek wnioskowania matematycznego i logicznego.

[8] B. Barnes, D. Bloor, *Relatywizm, racjonalizm a socjologia wiedzy*, w: B. Barnes, D. Bloor (red.), *Mocny program socjologii wiedzy*, op. cit., s. 22.

[9] Podobnie Susan Haack pokazuje, że odwołanie się definicji implikacji materialnej do tabeli prawdziwościowej w celu uzasadnienia *modus ponens* jest obarczone „błędnym kołem”. Por. S. Haack, *The Justification of Deduction*, “Mind” 85, 1979, s. 114.

Potraktowanie przymusu logicznego jako faktu do wyjaśnienia, a nie jako formy objawienia prawdy sprawia, iż socjologiczne badania w ramach samej matematyki i logiki nie są wykluczone *a priori*. Zachowanie zgodne z logicznymi konsekwencjami, które wynikają ze zbioru obowiązujących idei, samo wymaga wyjaśnienia.

Wittgenstein nie zaprzecza, że odczuwamy pewien przymus posługując się prawami logiki, lecz wskazuje na społeczny charakter tego przymusu. Pozór apodyktyczności matematyki i logiki Wittgenstein wyjaśnia odwołując się do instytucji społecznych i praktyki społecznej. Stwierdza: „można mimo to powiedzieć, że prawa wnioskowania zmuszają nas – mianowicie w takim sensie, jak inne prawa w ludzkim społeczeństwie".[10] Podobnie, wydawałoby się, bezwzględny charakter obliczeń arytmetycznych wyjaśnia on odwołując się do instytucji szkoły, w której uczymy się liczyć „...na niekończących się ćwiczeniach, z bezlitosną dokładnością. Dlatego jesteśmy wszyscy nieubłaganie zmuszeni, żeby po 'jeden' mówić 'dwa', po 'dwa' 'trzy' itd."[11] „Nie ćwiczymy dzieci tylko w liczeniu, lecz uczymy je także przyjmować szczególną postawę wobec błędu w obliczeniach".[12]

Wittgenstein sugeruje, że posługiwanie się wzorem jest osadzone w znormalizowanej praktyce społecznej poprzez używanie zwrotów: sposób, w jaki go stosujemy; to, jak nauczono nas go stosować. Każde działanie oparte o wzór u podłoża ma tę okoliczność, że istnieje zwyczaj, określona praktyka społeczna. Według Wittgensteina zastosowanie wzoru jest procesem społecznym a każdy przypadek użycia wzoru jest kulminacją procesu socjalizacji. W pewnym sensie matematyka powstaje, kiedy się ją uprawia i istnieje, tak jak się ją uprawia.

Matematyka funkcjonuje jak „instytucja" społeczna a instytucje, chociaż są wytworem ludzi, nie zależą od woli jednostki. Pod wpływem działania instytucji indywidualne zachowania utrwalają się a oczekiwania wyrażają się w postaci psychologicznego poczucia przymusu, konieczności. Wittgenstein proponuje nie-realistyczną teorię obiektywności matematyki, mówiąc: „matematyka buduje sieć norm".[13] Pojęcie normy odnosi się do czegoś względnie trwałego a nie do epizodycznych zachowań, które raz są, raz nie są z nią zgodne. Na przykład w przypadku liczenia postawa ta charakteryzuje się poczuciem, że obliczenia rządzą się własnymi prawami nawet wtedy, gdy liczący się pomyli. Instytucje i normy to coś więcej niż dyspozycje i oczekiwania. Kształtują postawy oraz są źródłem silnego poczucia obiektywności. Ale poczucie to nie może być uważane za wyraz uniwersalnej konieczności mającej podstawę w obiektywnej rzeczywistości matematycznej i konieczno-

[10] L. Wittgenstein, *Remarks* ..., op. cit., część I, § 116.
[11] Ibidem, część I, §4.
[12] Ibidem, część V, §40.
[13] L. Wittgenstein, *Remarks*, op. cit., część V, § 46.

ści logicznej tam panującej. Wittgenstein przeciwstawia się tego typu poglądom.

Bloor uważa, że sposób ujmowania matematyki przez Wittgensteina nie jest realizmem oraz nie zawiera teleologicznych założeń, lecz rozwija typowe pojęcia socjologiczne.[14] Opierając się na poglądach Wittgensteina, tak podsumowuje podejście Mocnego Programu do matematyki:

— Matematyka i logika to zbiory norm.

— Obie dziedziny mają ontologiczny status instytucji.

— Czynności takie jak liczenie, wnioskowanie dają się badać i wyjaśniać przy pomocy tych samych teorii, co każda inna grupa norm.

— Pojęcia i operacje matematyczne muszą być wypracowywane, uzasadnione i wpojone tak samo, jak normy każdej inne instytucji.

— Matematyka i logika mają trwałość i są podtrzymywane w ten sam sposób, co inne instytucje społeczne i w ten sam sposób będą się zmieniały.[15]

Ale Wittgenstein mówi nie tylko, że matematyka jest pewną aktywnością społeczności, że nie istnieje poza ludźmi. Lecz głosi także coś więcej. Że moglibyśmy „uprawiać" matematykę w dowolny (odmienny) sposób ukształtowany w innych warunkach przez społeczeństwo. Arbitralność nieobecna w poczynaniach matematycznych jednostki pojawia się na poziomie oddziaływań społecznych.

Wydaje się jednak, że Wittgenstein myli to, co jest logicznie niezdeterminowane i to, co jest arbitralne. Reguła matematyczna może być określona przez konwencję. Taka determinacja nie jest arbitralna, mimo że jest wymuszona logicznie. Na przykład w dziedzinie liczb naturalnych istnieje reguła, że wszystko za wyjątkiem 1 jest większe od 1. Kiedy wprowadziliśmy zero i liczby ujemne, porzuciliśmy tę regułę. Porzucenie jej doprowadziło do użytecznego rozszerzenia pojęcia liczby i wprowadzenia liczb ujemnych i całkowitych (przy zachowaniu innych reguł).

Kiedy wprowadzamy liczby ujemne, musimy zdecydować, jaki będzie rezultat operacji: $-1 \times -1 = ?$ Nowa liczba „-1" jest czymś nowym, niezachowującym definicji czy wcześniejszych regulacji, więc logicznie rzecz ujmując, moglibyśmy wybrać dowolną wartość, którą chcemy. Ale wtedy -1 mogłoby naruszyć prawa łączności i rozdzielności działań. Jeśli chcemy je zachować łącznie dla liczb ujemnych i dodatnich musimy przyjąć, że:

$$-1 \times -1 = 1$$

W pewnym sensie ta formuła jest po prostu konwencją. W innym sensie jest twierdzeniem. Na pewno n i e j e s t arbitralna.[16]

[14] D. Bloor, *Wittgenstein i Mannheim o socjologii matematyki*, w: B. Barnes, D. Bloor (red.), *Mocny program socjologii wiedzy*, wyd. cyt., s. 49.

[15] Ibidem, s. 56.

[16] Podobnie jest z uogólnianiem operacji potęgowania na wykładniki wymierne, rzeczywiste czy nawet zespolone. Rozszerzanie możliwości potęgowania musi „zachowywać" stare reguły.

Być może Wittgensteina zmyliły analogie pomiędzy matematyką a językiem. Zarówno język jak i matematyka posiadają swoje reguły. W języku powierzchniowe formy gramatyczne rzeczywiście są konwencjonalne, w takim sensie, że są arbitralne. Nie są zdeterminowane przez wrodzoną konieczność. Matematyka jest inna. Jest czymś więcej niż prawie przezroczystym sposobem przekazywania danych, informacji. Ma swoją treść. Jej reguły nie są dowolne. Są zdeterminowane, określone, wyznaczone przez matematyczną „wygodę" i matematyczną konieczność.

WIZJA MATEMATYKI W *PROOFS AND REFUTATIONS* LAKATOSA

Aby pokazać, że matematyka „na wyższym poziomie" także funkcjonuje na sposób społeczny, przedstawiciele *Mocnego Programu* odwołują się do poglądów Lakatosa na matematykę. W nich poszukują inspiracji by wskazać związki pomiędzy procesami społecznymi a stylem i zawartością wiedzy matematycznej.

Lakatos zaatakował formalizm który dominował w filozofii matematyki w XX wieku. Według niego formalizm odmawia statusowi matematyki większości tego, co zwykle jest uważane za matematykę, gdyż ma tendencję do utożsamiania istoty matematyki z jej formalną abstrakcyjną strukturą, a filozofii matematyki z metamatematyką. Według Lakatosa obraz matematyki zawartej podręcznikach i monografiach zawierający, na początku, pojęcia, definicje, później formułowane twierdzenia i dalej nie odparte dowody jest błędny, a poza tym nic nie mówi o rozwoju matematyki. Lakatos zarzucał formalistom, że wyłączyli historię matematyki z filozofii matematyki przez co „stała się pusta." Historia poucza nas, że w rzeczywistości u początków teorii matematycznych nie stoją definicje i aksjomaty, lecz problemy (hipotezy) i ich domniemane rozwiązania. Próby rozwiązywania problemów czy uzasadnienia hipotez na ogół zaczynają się od spekulacji czy eksperymentu myślowego. Te z kolei odwołują się do przeczuć, intuicji lub wyobrażeń. Zdarza się, że korzystają z wybranej pseudo-empirycznej procedury w celu „osadzenia", ugruntowania hipotezy w jakiejś dobrze wyodrębnionej dziedzinie wiedzy, lub – co też jest dopuszczalnym rozstrzygnięciem – jej obalenia.

Lakatos przeciwstawił formalizmowi radykalnie odmienną wizję matematyki, to jest matematyki jako struktury żywej, rozwijającej się, dalekiej od systemu kierującego się sztywnymi, z góry ustalonymi regułami. Swoją propozycję zaprezentował odwołując się do historii poszukiwań dowodu twierdzenia Eulera o wielościanach. Zamiast symboli i reguł przekształcania, Lakatos przedstawia ludzi, wykładowcę i studentów podczas hipotetycznej lekcji. *Proofs and Refutations* [17] są dialogiem[18] między uczniami i nauczycie-

[17] Polski przekład: I. Lakatos, *Dowody i refutacje. Logika odkrycia naukowego*, przeł. M. Kozłowski, K. Lipszyc, Wyd. TIKKUN, Warszawa 2005.

lem, gdzie nauczyciel stawia przed uczniami zagadnienie do zbadania – hipotezę, że dla brył wypukłych spełniona jest formuła podana przez Eulera. Uczniowie formułują możliwe rozwiązania, przedstawiają przykłady i kontrprzykłady. Poszukują dowodów, które początkowo nie są zadowalające czy ostateczne a przy okazji doprecyzowują definicję wielościanu.

W przeciwieństwie do maniery formalistów, polegającej na rozważaniu systemu formalnego wychodząc od pierwszych zasad, Lakatos przedstawia starcie poglądów: argumentów i kontrargumentów; zamiast zastygłej, statycznej matematyki - matematykę rozwijającą się w sposób nieprzewidywalny. W myśl tej wizji teorie matematyczne kształtują się w gorącej debacie oraz dzięki występowaniu niezgodności poglądów. Wątpliwości są drogą do pewności, a ta znów prowadzi do nowych wątpliwości. W przekonaniu Lakatosa fałszem jest przedstawianie matematyki tak, jakby była ona zasadniczo beztreściową siecią wynikania, że dowody muszą być utożsamiane z formalnymi strukturami wynikania typu: „jeżeli … to". Ważną częścią matematyki jest właśnie treść, która jest usuwana z opisu, gdy koncentrujemy się na formalnych związkach. Dowód nie jest mechaniczną procedurą, która przenosi nieprzerwany łańcuch prawdy od założeń do konkluzji. Jest on wyjaśnianiem, uzasadnianiem i szczegółową „dyskusją", która służy do uznawania przypuszczeń, a pojawiające się kontrprzykłady czynią go szczegółowym i pozwalają doprecyzować. Każdy krok dowodowy może być obiektem krytyki. Lakatos twierdzi, że procedura dowodu (ta rzeczywiście przeprowadzana a nie formalistyczna) nie posiada zbioru a priori ustalonych implikacji składających się na nią. W szczególności nie jest z góry ustalona kwestia czy istnieją kontrprzykłady dla podanych kroków dowodowych. Stabilność i zakres każdego twierdzenia są niepewne. Krytyczna dyskusja i doprecyzowywanie głównej tezy nie mają w zasadzie końca. Nie ma żadnej końcowej prawdy do ujawnienia, jest jedynie rozgałęziona, poprzeplatana sieć twierdzeń i kontrtwierdzeń, którą trzeba równoważyć i stabilizować.

Lakatos odrzuca pogląd, że obiekty i struktury matematyczne podpadają pod jedyny naturalny zbiór rodzajów i gatunków. „Matematyczne gatunki" traktuje on jako ludzkie wytwory, więc ich klasyfikacja jest naszym zadaniem i problemem. W przeciwieństwie do statycznego, uporządkowanego raz na zawsze świata obiektów platońskich, gdzie istnieją wyraźne różnice między poszczególnymi rodzajami obiektów, w rozumieniu Lakatosa świat matematyki jest bardziej „woluntarystyczny". Oznacza to, że jest on zapełniony obiektami różnych rodzajów, między którymi jest płynna granica; wieloma różnymi procedurami ich dotyczącymi, wyznaczającymi nieskończoną liczbę różnych dystynkcji, które można sensownie przeprowadzić. Wiara platoników i formalistów w ustalony podstawowy słownik i idealnie zrozumiałe

[18] Ten dialog nie jest zmyślony. Wypowiedzi uczniów są parafrazami rzeczywistych poglądów wygłaszanych przez matematyków w trakcie dyskusji nad dowodem twierdzenia Eulera, co autor dokumentuje dokładnymi cytatami z prac oryginalnych.

terminy jest złudzeniem stworzonym przez nasze nawyki werbalne. Nowe procedury dowodowe oraz „rozciąganie znaczeniowe" pojęć mogą rozbić każdą ideę, a „rozciąganie" pojęć i przekraczanie granic klasyfikacyjnych jest integralną częścią działalności matematyka. Matematyka jest czymś, co trzeba „negocjować". Lecz jeśli matematyka nie ma być chaosem subiektywnych opinii, ale dziedziną w pewnym znaczeniu obiektywną, pewną formą wiedzy, to musi podlegać jakimś regulacjom, normom.

Według opinii przedstawicieli mocnego programu Lakatos pokazał, że matematykę należy pojmować wynik aktywności człowieka uwikłanego w określone zależności i układy społeczno-kulturowe. Jest ona określona przez społeczeństwo, przez normy ukształtowane czy wypracowane w trakcie rozwoju społeczeństwa. Skoro tak, to ludzkie zachowania w obliczu problemów teoretycznych i reakcje na trudności koncepcyjne matematyki czy anomalie są czymś istotnym dla wiedzy matematycznej. Są one konieczną, a nie przypadkową, czysto zewnętrzną częścią tej wiedzy. Gdy uznamy, że powstawanie teorii matematyki jest procesem społecznie uwarunkowanym, to oczywiste staje się, że nie ma stałych „esencji platońskich", ponieważ nie ma stałych, ponadczasowych esencji (struktur) społecznych. Logicyzm i formalizm tracą swoje filozoficzne umocowanie.

W przekonaniu przedstawicieli mocnego programu *Proofs and Refutations* otwierają drogę socjologicznemu podejściu do matematyki. Aby pokazać, na czym polega ta droga, Bloor w swoim artykule[19] zestawia matematyczną dyskusję przedstawianą w stylizowany sposób przez Lakatosa z analizą antropologicznej teorii profanacji, rytuału, ograniczeń pokarmowych zawartych w książce Mary Douglas.[20] Douglas dostarcza schemat opisujący charakter powiązań grup i organizacji społecznych, które w uproszczeniu można określić jako indywidualistyczne, pluralistyczna, konkurencyjne i pragmatyczne. Wzorce te mogą być wyrażone za pomocą dwóch teoretycznych wymiarów: osi koherencji (opisującej spójność danej grupy społecznej) i osi struktury (opisującej sieć zależności formalnych obowiązujących w grupie). W zależności od charakteru grupy występują charakterystyczne sposoby radzenia sobie przez członków danej wspólnoty z niestandardowymi zachowaniami, sytuacjami czy z „odmieńcami".

Według Bloora, monografie Lakatosa i Douglas „mają wspólny temat: dotyczą one sposobów reagowania ludzi na rzeczy, które nie pasują do szufladek i granic uznanych sposobów myślenia."[21] Są to książki o anomaliach łamiących uznane schematy klasyfikacyjne i sposobów reagowania na te wykraczające poza standard pojęcia czy zachowania. Bloor zauważa, że niezależnie od tego, czy jest to przykład przeczący twierdzeniu (kontrprzykład),

[19] D. Bloor, Wielościany i nieczyste zwierzęta z Księgi Kapłańskiej, w: B. Barnes, D. Bloor (red.), *Mocny program socjologii wiedzy*, wyd. cyt., s. 275–319.

[20] M. Douglas, *Natural Symbols: Explorations in Cosmology*, Harmondsworth 1973.

[21] D. Bloor, *Wielościany i nieczyste zwierzęta z Księgi Kapłańskiej*, op. cit., s. 275.

czy człowiek łamiący uznane normy moralne, na przykład pedofil, pojawia się ta sama gama możliwych reakcji na taką sytuację. Książka Douglas wyjaśnia w odniesieniu do zagadnień antropologicznych, dlaczego tak jest i opisuje niektóre mechanizmy łączące to, co społeczne, z dziedziną poznania.

Według Bloora pomysły Douglas można odnieść do różnych reakcji matematyków na kłopoty w dowodzeniu i w ten sposób wyjaśnić ich zachowania dotyczące, jak się wydawało, czysto teoretycznych (przedmiotowych) kwestii funkcjonowania matematyki. Teoria struktury i koherencji grupowej zastosowana do sytuacji opisanej przez Lakatosa w *Proofs and Refutations*, dostarcza – twierdzi przedstawiciel mocnego programu – hipotezy łączącej wiedzę matematyczną ze strukturą społeczną, pewnego wyjaśnienia elementów praktyki matematycznej. W zależności od tego, w jakiego typu strukturze grupowej funkcjonuje matematyk, pojawiają się określone reakcje na nietypowe pojęcia, nieoczekiwane sytuacje teoretyczne czy niepożądane wyniki rozumowania. Inaczej zachowują się członkowie sformalizowanych i zhierarchizowanych struktur, inaczej członkowie społeczności o niskiej koherencji i ubogiej strukturze, gdzie panuje indywidualizm, a reguły gry konkurencyjnej są jedynymi uznawanymi formami społecznymi selekcji wyników. Jako przykład wyjaśnień tego typu Bloor wskazuje badania R. Stevena Turnera[22] nad zmianami w metodologii uprawiania matematyki w Prusach w połowie XIX wieku. Po reformie systemu szkolnego uniwersytety przestały być zamkniętymi korporacjami zachowującymi stare przywileje cechowe. Ich nowa struktura i narzucone formy działalności przezwyciężyły skostniałe lojalności grupowe, a konkurencyjna specjalizacja sprawiła, że dokonywanie odkryć stało się koniecznością dla tych, którzy chcieli zaistnieć na polu działalności matematycznej. Było to możliwe dzięki zmianom w układach społecznych dominujących na uniwersytetach.

Socjologiczne podejście do działalności matematyków sugeruje, że na teorię matematyczną trzeba patrzeć jako na wynik czy wyraz powiązania publicznych, zobiektywizowanych form wiedzy ze strukturą społeczną funkcjonującą w danym obszarze kulturowo-historycznym. Style życia i wzorce oddziaływań społecznych są odtwarzane w działalności matematycznej podczas „gry w matematykę”. Bloor podkreśla, że matematycy „czyniąc to [prowadząc badania matematyczne – J.M.] nie robią ... dwóch różnych rzeczy, ani czasem jednej rzeczy, a czasem drugiej; ponieważ wiedza [matematyczna – J. M.] jest tym, czym jest [gdy – J. M.] robiąc jedno, robią drugie.”[23] Układy społeczne, w których funkcjonują matematycy, są ściśle skorelowane z ich dokonaniami matematycznymi w tym sensie, że na ogół ukierunkowują ba-

[22] Por. R. S. Turner, *The Growth of Professional Research in Prussia, 1818–1848 – Causes and Context,* „Historical studies in the physical sciences”, 1971, 3, s. 137–182; *University Reformers and Professional Scholarship in Germany, 1760–1806,* w: L. Stone (red.), *The University in Society*, Oxford, 1975, II, s. 495–531.

[23] D. Bloor, *Wielościany i nieczyste zwierzęta z Księgi Kapłańskiej*, op. cit., s. 296.

dania, determinują styl uprawiania matematyki, preferencje i przekonania, a nawet osobiste upodobania matematyka co do, na przykład, ważności i wartości konkretnych problemów lub rozstrzygnięć matematycznych.

Znakomitą ilustracją socjologicznego ujęcia działalności matematyków jest niedawno wydana książka[24] Jerzego Mioduszewskiego opisująca kulisy pracy matematyków.

MATHEMATICS IN THE LIGHT OF THE STRONG PROGRAMME OF THE SOCIOLOGY OF KNOWLEDGE

ABSTRACT

The sociology of science propagates the thesis about the social nature of all knowledge, however, Karl Mannheim, the most eminent representative of this way of thinking, tends to treat mathematics and logic differently. Mannheim considered mathematics and logic as disciplines of knowledge which are not amenable to social determination. The representatives of the Strong Programme of the sociology of knowledge raise once again the problem of the status of mathematics and logic. They aim to show that these sciences can be also reasonably analysed by means of sociological tools. In their considerations they refer to the ideas of Ludwig Wittgenstein and Imre Lakatos. They are convinced that Wittgenstein's R*emarks on the Foundations of Mathematics* and Lakatos's *Proofs and Refutations* opened a way to a sociological approach to mathematics.

Keywords: mathematics, sociology, Strong Programme, status of mathematics.

[24] J. Mioduszewski, *Cztery szkice z przeszłości matematyki*, Wyd. Impuls, Kraków 2013.