

E w a P i o t r o w s k a

Dokąd zmierza filozofia matematyki?

Słowa kluczowe: *formalizm, intuicjonizm, logicyzm, kierunek kulturowy, społeczny konstruktywizm, etnomatematyka, „nowa filozofia matematyki”*

Nowojorski matematyk i filozof tej nauki – Morris Kline potwierdzał w swej pracy, wydanej w latach 80. XX wieku, że matematyka jest istotą naszego myślenia o świecie rzeczywistym. Nie tylko wychodzi poza granice wrażeń zmysłowych, ale ma na nie wpływ¹.

I rzeczywiście, matematyka przez całe wieki uchodziła za wzór nauk, za naukę wysoce abstrakcyjną, z prawdami i twierdzeniami oczywistymi, jasnymi i ścisłymi. Upowszechnił się stereotyp matematyki jako „królowej nauk”, jako nauki doskonałej². Matematyka też niemal od zarania swego istnienia stawała się przedmiotem zainteresowania filozofii. To na jej gruncie stawiamy pytanie o przedmiot matematyki – jak go rozumiano w przeszłości, jak pojmuje się współcześnie, a także czy ulegnie on przeobrażeniom w przyszłości. Niewątpliwie tym przedmiotem jest sama istota, natura oraz charakterystyka poznania matematycznego, jej struktury wewnętrzne i zewnętrzne (np. związek z otaczającą nas przyrodą) oraz powiązania i relacje z innymi naukami (np. w procesie tzw. matematyzacji nauk)³. Niekiedy ów przedmiot wymyka się spod kontroli reguł racjonalizmu, zastępowany jest pewnymi mistyfikacjami, na skutek zaufania do bliżej nieokreślonych idei, zbytnej idealizacji struktur matematyki lub czynienia z niej nauki „wyjątkowej”. Oczywiście

¹ M. Kline, *Matematyka – poisk istiny*, Moskwa 1988 (z ang. *Mathematics and the Search for Knowledge*, New York–Oxford 1985).

² J.D. Barrow, *π razy drzwi. Szkice o liczeniu, myśleniu i istnieniu*, Warszawa 1996.

³ E. Piotrowska, *Związki matematyki z rzeczywistością. Dyskusje w nauce radzieckiej lat 70-tych i 80-tych XX wieku*, w: J. Such, J. Wiśniewski (red.), *Teoria i eksperyment*, Poznań 1992, s. 83–101.

przedmiot ten zmieniał się w rozwoju historycznym tej nauki i podlegał procesowi wartościowania⁴.

Przedmiotem moich rozważań jest filozofia matematyki współczesnej, tzn. uprawianej po tzw. trzecim kryzysie podstaw matematyki, który – podobnie jak poprzednie dwa kryzysy – diametralnie zmienił sam przedmiot i refleksję filozoficzną tej nauki.

Jeszcze klasyczne kierunki filozofii matematyki (np. logicyzm, formalizm, intuicjonizm) upatrywały w matematyce naukę doskonałą, dającą wiedzę pewną i oczywistą. Jednak w historii nowożytnej, a głównie najnowszej myśli matematycznej, lata 20. i 30. XX wieku stanowiły fazę przełomową. Zakończyły się bowiem trwające ponad pół wieku dyskusje, często burzliwe, niekiedy bardzo twórcze, a bywało, że kontrowersyjne, nad podstawami matematyki, zwłaszcza natury filozoficznej, ale i czysto matematycznej. Dyskusje z przełomu XIX i XX wieku nad filozoficznymi problemami matematyki należycie nie wyjaśniły, nie zapobiegły też narastającemu kryzysowi podstaw matematyki w sensie epistemologicznym, jak i ontologicznym. Wprawdzie np. intuicjonizm uległ koncepcyjnym przekształceniom (jako tzw. neointuicjonizm), lecz do rozwiązania istotnych kwestii poznawczych matematyki okazał się mało przydatny. Twórca zaś formalizmu matematycznego, wybitny matematyk niemiecki David Hilbert, postawił matematykom 23 zasadnicze problemy do rozwiązania, ale jego obraz matematyki jawił się jako nadmiernie wyizolowany, wyabstrahowany, zbyt optymistyczny i tylko pozornie zintegrowany wewnętrznie. Z punktu widzenia teoriopoznawczego dla Hilberta ważne było, aby matematykę traktować w kontekście rozwiązywania istotnych problemów. Połączone to było z optymizmem uczonego, że każdy z nich można rozwiązać w odpowiednim czasie i dogodnych uwarunkowaniach intelektualnych matematyków⁵.

Twierdzenia Gödla ostatecznie podważyły dorobek formalizmu w rozwiązaniu i rozstrzygnięciu zasadniczych problemów epistemologicznych matematyki, utrwalając istniejący kryzys jej podstaw⁶. Debaty zaś nad nim przyczyniły się, w latach 40. i 50. XX wieku, do większego zainteresowania węzłowymi problemami filozofii matematyki. Równocześnie środowiska naukowe, zwłaszcza Stanów Zjednoczonych i Wielkiej Brytanii, uznały za rzecz wątpliwą, a nawet anarchiczną owe ciągłe dyskusje nad próbami przełamania sytuacji kryzysowej w podstawach matematyki. Zauważono, że filozofia matematyki ograniczona do badania jej podstaw jest mało skuteczna i należy poszukiwać

⁴ Por. J.D. Barrow, *π razy drzwi*, dz. cyt.

⁵ O formalizmie w filozofii matematyki por. E. Piotrowska, *Filozoficzne podstawy formalizmu matematycznego. Studium nad poglądami Davida Hilberta*, Poznań 1990.

⁶ Por. S. Krajewski, *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne*, Warszawa 2003.

nowych metod i założeń poznawczych matematyki, bo te tradycyjne zawiodły i są nieefektywne⁷.

Hilary Putnam sądził na przykład, że zakres zainteresowań filozofii matematyki należy rozszerzyć, uściślić i ukonkretnić. Nie można bowiem obsesyjnie toczyć dyskursów o permanentnym kryzysie podstaw matematyki, bo grozi to rozdziwieniem pomiędzy „pustką myślową” filozofów debatujących nad wspomnianym kryzysem, dla nauki niekiedy twórczym oraz inspirującym, i rozwojem samej matematyki. Putnam zauważył również, że filozofia nauki może przysporzyć sporo nadziei badawczej filozofii matematyki⁸. Była to wypowiedź śmiała, lecz bynajmniej nie odosobniona. Tradycyjny model filozofowania w odniesieniu do matematyki należało więc skutecznie przełamać oraz zmodernizować. Wyłonił się problem opracowania nowych i twórczych zasad filozofii matematyki.

W latach 60. i 70. XX wieku wśród dużej grupy matematyków i filozofów tej dziedziny upowszechniło się przekonanie, by nie koncentrować się wyłącznie na strukturze wewnętrznej matematyki, ale jej podstawy epistemologiczne znacznie rozszerzyć na sprawy zewnętrzne tej nauki (np. natury społecznej, kulturowej, ideologicznej itp.). Do tego stwierdzenia dołączyły autorytety m.in. z zakresu filozofii nauki (np. K. Popper, I. Lakatos, P. Feyerabend). Zauważyli oni, że działania matematyków (szczególnie te zewnętrzne) nie mogą obejść się bez filozofii matematyki, lecz znacznie zmodernizowanej. W latach 60. i 70. XX wieku można zauważyć, że wraz z twórczymi nieraz dyskusjami nad modernizacją matematyki i jej filozofii przeważała myśl, iż tradycyjna akademicka filozofia matematyki ma rację bytu wtedy, gdy uwzględni się różne perspektywy i punkty widzenia odnoszące się do jej zasadniczych dziedzin zainteresowania.

Tymczasem Morris Kline napisał w swej pracy z 1980 roku z pewną dozą przestrogi:

Kryzys [podstaw] matematyki i spowodowane nim kontrowersje w kwestii tego, czym jest prawdziwa matematyka, wpłynęły negatywnie także na stosowanie metod naukowych w innych dziedzinach naszej kultury, takich jak filozofia, nauki polityczne, etyka czy estetyka. Nadzieja na znalezienie obiektywnych, niepodważalnych praw i standardów osłabła. Skończył się Wiek Rozumu⁹.

⁷ Por. np. S. Körner, *The Philosophy of Mathematics*, New York 1960, s. 9, 12.

⁸ Por. H. Putnam, *Mathematics without Foundations*, „Journal of Philosophy” 1967, vol. 64, s. 5–22.

⁹ Por. M. Kline, *Czy matematyka przestała być nauką pewną i niepodważalną?*, przeł. R. Murawski, w: *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, Warszawa 2002, s. 274.

Dla Kline'a znajdująca się w kryzysie matematyka była częścią kultury w znaczeniu i wymiarach ogólnych. Przesilenie w funkcjonowaniu koncepcyjnym matematyki stawało się zarazem symptomem kryzysowym w szeroko rozumianej kulturze¹⁰.

Wielorakie i złożone relacje zachodzące między matematyką a szeroko rozumianą kulturą bynajmniej nie są i nie były jednoznacznie pojmowane i powszechnie akceptowane. Być może pod wpływem niegdyś popularnego formalizmu, nadal stereotypowo przyjmuje się, że matematyka to nic innego jak zwykła „gra symboli” i pozostaje tylko w pośredniej relacji z otaczającą nas rzeczywistością. Jest to bardzo upowszechniony, ale błędny pogląd, stereotyp, dotyczący roli i funkcji matematyki. Matematyka – według tej koncepcji – jest rozumiana dość elitarnie, hermetycznie i w sposób wyidealizowany. Na pytanie, jakie są tego przyczyny, trudno dać jednoznaczną odpowiedź. Nie jest to jedyne spojrzenie na matematykę i jej związki z innymi naukami oraz kulturą.

Dostrzeżono nadto, że matematyk kształci się, prowadzi badania naukowe i upowszechnia praktycznie osiągnięcia swej nauki w określonym środowisku kulturowym i cywilizacyjnym. Zakres filozofii matematyki znacznie się też rozszerzał, wydawnie korzystając ze zdobyczy ideowych, antropologicznych oraz humanistycznych i społecznych, a sama matematyka stawała się dziedziną charakteru interdyscyplinarnego. Wkraczała coraz bardziej np. do psychologii, socjologii, historii nauk, antropologii społecznej. Wykształcały się nowe dyscypliny naukowe, np. etnografia matematyczna, zajmująca się ciekawym, choć złożonym procesem kształtowania się pojęcia liczb i figur wśród społeczeństw pierwotnych (np. Indian).

W końcu XX wieku ukazała się praca znanego angielskiego badacza zjawisk kulturowych i społecznych w nauce C.P. Snowa o „dwóch kulturach”¹¹. Uczony ten doszedł do wniosku, że faktycznie istnieją dwie odrębne kultury. Pierwszą prezentują nauki przyrodniczo-techniczne i matematyka (*science*). Drugi kierunek w rozwoju nauki, swoistą „drugą kulturę”, poświadczają nauki społeczno-humanistyczne (*humanities*). Zwolennicy tych dwóch orientacji i trendów w poglądach na stan aktualny i przyszłość nauki we współczesnej kulturze – sejentyści i humaniści – nie mogą się wzajemnie porozumieć i pogodzić, tworzą więc dwie odmienne kultury, nieufne wobec siebie, a czasem wzajemnie się zwalczające.

Tymczasem współczesny duński uczony O. Skovsmose uważa, że zasadniczą ideą matematyki jest, aby rozumieć ją całościowo, globalnie, w relacji

¹⁰ Por. E. Piotrowska, *Z najnowszych kierunków filozofii matematyki. Na przykładzie analizy poglądów M. Kline'a*, w: J. Such, E. Pakszys, I. Czerwonogóra (red.), *Rozprawy i szkice z filozofii i metodologii nauk*, Warszawa–Poznań 1992, s. 263–275.

¹¹ C.P. Snow, *Dwie kultury*, Warszawa 1999.

z innymi naukami. W tym przypadku demarkacja pomiędzy naukami przyrodniczymi (czy matematycznymi i przyrodniczymi) musi zostać przełamana. Dotyczy to także wzajemnych relacji, jakie zachodzą pomiędzy matematyką i naukami pokrewnymi a kulturą. Skovsmose skupił przede wszystkim uwagę na relacjach, jakie zachodzą pomiędzy matematyką a rozwojem – coraz bardziej we współczesnym świecie eksponowanej – kultury technicznej. Duński matematyk i filozof tej nauki dostrzegał coraz większe zainteresowanie matematyków tym, co można określić jako „zewnątrzną” infrastrukturę matematyki¹². Stanowi to także przedmiot zainteresowania niniejszego artykułu.

Jeżeli mówimy o kulturze w matematyce czy kulturze matematycznej, to rozumiemy ją w podwójnym sensie. W pierwszym przypadku chodzi o kulturę struktur wewnętrznych matematyki. Komponentami kulturowymi będą wtedy jej koncepcje, metody, problemy, kryteria prawdy, istnienie, pewność, ścisłość, niepodważalność twierdzeń. W drugim znaczeniu interesują nas zewnętrzne powiązania i uwarunkowania matematyki i jej rozwoju¹³. Matematyka oraz pokrewne jej nauki mogą być częścią np. kulturowych grup lokalnych. Może to np. dotyczyć wspólnot matematyków rozwiązujących określone problemy. Owa „zewnątrzną” strona funkcjonowania matematyki może być zakodowana w określonych kulturach narodowych, a nawet ponadnarodowych kręgach kulturowych (np. w rozumieniu Spenglerowskim).

Część matematyków była świadoma, że matematyka (zwłaszcza mająca zastosowanie np. w zaawansowanej technologii) nie może być zamknięta i zakodowana w mało zrozumiałym kręgu symboli, odcięta od przyrodniczych realiów i życia człowieka. Historia matematyki stanowi tego dobitne potwierdzenie. Wypowiedzi zaś z ostatniego stulecia (np. filozofów i matematyków) dotyczą związków matematyki z określoną ekologią i strukturami kultury. Oto zaledwie kilka, choć jak się zdaje, wydatnie charakterystycznych, ocen w tej dziedzinie.

W latach 1918–1922 ukazało się monumentalne dzieło niemieckiego myśliciela Oswalda Spenglera *Upadek Zachodu (Untergang des Abendlandes)*¹⁴. Przekonany o permanentnym i dotkliwym kryzysie cywilizacji i kultury Zachodu Spengler wprowadził pojęcie „morfologii kulturowej”. W dziejach ludzko-

¹² Por. O. Skovsmose, *Mathematics as a Part of Technology*, „Educational Studies in Mathematics” 1988, vol. 19, nr 1, s. 23–41.

¹³ Czynniki zewnętrzne w rozwoju matematyki są wyraźnie podkreślane przez niektóre współczesne kierunki filozofii matematyki, zwłaszcza konstruktywizm społeczny czy etnomatematykę.

¹⁴ Por. O. Spengler, *Der Untergang des Abendlandes*, Munchen 1918 (t. I), 1922 (t. II). O poglądach Spenglera w odniesieniu do matematyki por. mój artykuł: E. Piotrowska, *Matematyka a procesy kulturowo-cywilizacyjne. Poglądy Oswalda Spenglera*, w: W. Heller (red.), *Świat jako proces*, Poznań 1996, s. 135–158.

ści wydzielił on co najmniej kilka wielkich kultur: egipską, chińską, dawną semicką, hinduską, kulturę magiczną, apollińską (lub grecko-rzymską) i faustyjską (inaczej kulturę Europy Zachodniej). W każdej z tych kultur wyodrębnił jej „ducha” i „styl”. We wspomnianych cyklach kulturowych, rozumianych zresztą biologicznie oraz identyfikowanych historycznie, szczególna twórcza rola przypadła matematyce (np. pojęcie liczby jest dla niemieckiego myśliciela kategorią kulturową). Spengler bronił podstaw skrajnego relatywizmu kulturowego, lecz zarazem – doceniając postęp cywilizacyjny Zachodu – był świadom znaczącej roli matematyki w tej materii. Dostrzegał, że tak widoczny w czasach nowożytnych awans Zachodu (zwłaszcza techniczny) znaczony był postępem wiedzy matematycznej. Jako jeden z pierwszych widział rozwój matematyki wielopłaszczyznowo i w szerokich wymiarach, dziś powiedzielibyśmy – globalnych. Interesowały go przede wszystkim relacje zachodzące pomiędzy rozwojem matematyki europejskiej i na innych kontynentach. Także w przypadku Spenglera nastąpiła swoista „akulturyzacja” przedtem zbyt formalnie, elitarnie i stereotypowo rozumianej matematyki. Matematyka u niemieckiego myśliciela stała się historycznie usytuowaną i uwarunkowaną kategorią kulturową.

Ta sama matematyka stawała się też ważnym komponentem rozwoju społecznego (można by to nazwać procesem „socjologizacji” matematyki). Obecnie zwłaszcza społeczni konstruktywiści zwracają baczną uwagę na socjalne uwarunkowania rozwoju matematyki, m.in. poprzez działalność tzw. wspólnot matematyków. Salo Restivo zapoczątkował nową dyscyplinę – socjologię matematyki. Współczesna nauka była dla niego złożonym problemem społecznym i kulturowym, a matematyka w tym przypadku nie stanowiła żadnego wyjątku. Restivo opowiedział się za społeczną konstrukcją matematyki, zawsze rozumianą w ścisłym kontekście kulturowym¹⁵.

W 1954 roku ukazała się słynna praca angielskiego myśliciela Johna D. Bernala *Nauka w dziejach (Science in History)*. Był on przekonany o społecznej funkcji nauki (także matematyki) oraz organizacji badań naukowych (bronił kontrowersyjnej tezy o potrzebie planowania rozwoju nauki). Każda nauka – według niego – ma swoje cele, impulsy rozwojowe oraz uwarunkowania natury społecznej.

W swoich refleksjach o „socjalizacji” nauki Bernal nie był bynajmniej odosobniony. W odniesieniu do matematyki przekonany o społeczno-kulturowym rozwoju nauki był również znany holenderski matematyk Dirk Struik¹⁶.

¹⁵ Por. S. Restivo, *The Social Relations of Physics, Mysticism and Mathematics*, Dordrecht 1985.

¹⁶ Por. D.J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, New York 1948 (dwa tomy). Istnieje także polski przekład tej pracy, tłumaczonej zresztą na liczne języki. O życiu i poglądach matematycznych D. Struika por. artykuł: E. Piotrowska, *Philosophical and ideological ideas*

W tłumaczonym na liczne języki zarysie dziejów matematyki Struik ukazywał nie tylko jej korzenie, lecz także uzasadniał powiązania przez wieki rozwoju matematyki z życiem ekonomicznym i społecznym. Dał też podstawy socjologii matematyki, a to oznacza, że mamy do czynienia z pełnym zakodowaniem rozwoju oraz struktur matematyki w szeroko rozumianych uwarunkowaniach życia ludzkiego, także kulturowego. Struik uważał, że matematyka rozwija się i dojrzewa „w ogólnej kulturowej i socjologicznej atmosferze”. Wpływ na jej rozwój – jak podkreślał – miało rolnictwo, handel, rzemiosło, wojny, technika, fizyka, astronomia, filozofia (np. związki kartezjanizmu z mechaniką, określone relacje scholastyki z powstaniem rachunku różniczkowego i całkowego).

W 1968 roku ukazała się także praca (w wersji rozszerzonej w 1982 roku) amerykańskiego matematyka i filozofa tej nauki Raymonda L. Wildera o matematyce jako „systemie kulturowym”¹⁷. Uczony ten przekonywał, że matematyczne idee oraz koncepcje tworzą podstawę kulturową tej nauki, ona sama zaś ma charakter relatywny. Jako zwolennik epistemologii ewolucyjnej, Wilder przeczył, by w matematyce mogły występować rewolucje. Te, jak sądził, mogą się zdarzać w metafizyce, symbolizmie, a nawet w metodologii matematyki, nigdy jednak w strukturach i rozwoju tego, co nazywał „rdzeniem matematyki”. Matematyka jest zmienną kategorią kulturową i dzięki stosowaniu podstaw kulturowych zachodzi możliwość wyeliminowania (np. w dowodzeniu) „mglistych i mistycznych argumentów”. Historycznie i kulturowo rozumiana matematyka nie pozwala, aby ją rozumieć w wymiarach absolutystycznych, bo wszystko w niej jest względne. Jako nauka podlega ciągłemu rozwojowi, a zmienny jest zarówno aktualny stan matematyki, jak też bieżące kierunki jej rozwoju. W matematyce – zdaniem Wildera – nie można się też skupiać wyłącznie na standardach ścisłości i dowodowości, ale również na przedmiotach, koncepcjach i trendach, a te są kategoriami kulturowymi. Matematycy są podatni na ich działanie i w niczym nie różnią się od botaników, ekonomistów i farmerów. Optymistycznie prognozował Wilder, że także w przyszłości matematyka będzie aktywną, żywotną i wyjątkową siłą, m.in. poprzez niczym nieskrępowane rozprzestrzenianie się „idei matematycznych”. Rozwój matematyki zakodowany jest w kulturze ogólnej i stąd też procesy ewolucji i dyfuzji kulturowej obejmują dyscypliny matematyczne. W określonym systemie kulturowym matematyka tworzy rodzaj subkultury, np. określa kulturę pojedynczego matematyka i wspólnot matematycznych. Matematyka w starożytnej Grecji była niewątpliwym „naturalnym elementem kultury grec-

of Dirk Jan Struik. *Marxist materialism in the philosophy of mathematics*, w: E. Piotrowska, J. Wiśniewski (red.), *Philosophical Aspects of the Science*, Poznań 2005, s. 25–49.

¹⁷ Tytuł pracy R.L. Wildera z 1968 roku: *Evolution of Mathematical Concepts. An Elementary Study*, New York 1968. W wersji zmienionej i rozszerzonej: *Mathematics as a Cultural System*, Oxford 1981.

kiej”. Matematyka jest dziełem człowieka, a style i wzorce kulturowe w niej osadzone i kształtowane są „zbiorową własnością matematyków”. Matematyka z podstawami kulturowymi jest bardziej zrozumiała, a nawet uczony ten wprowadza, jako oczywiste, pojęcie „kultury matematycznej”. Zdaniem Wildera, wiedza matematyczna w kontekście kulturowym narasta kumulatywnie, a jej struktury i wzorce rozwojowe są najczęściej złożone. Kulturowy charakter oraz uniwersalność matematyki potwierdzają więc, tak właściwe tej nauce, procesy abstrakcji, uogólniania oraz konsolidacji. W tej ewolucji matematyki możemy analizować to, co matematyczne, i to, co nie jest matematyczne, matematyczne sprzeczności i paradoksy, oraz żądać od matematyki większej ścisłości. Matematyka – według Wildera – podlega systemowemu, kulturowemu rozwojowi. Uczony ten w swoich badaniach uwzględnia więc nie tylko metody logiki i metamatematyki, ale w równym stopniu socjologię, nauki o kulturze, antropologię i historię.

Obok R.L. Wildera, również Alan J. Bishop jest przedstawicielem orientacji kulturowej w rozwoju amerykańskiej filozofii matematyki. Trudno zresztą, by myślał inaczej, żyjąc w społeczeństwie USA, kraju, gdzie matematyka spełnia istotną rolę w kształtowaniu cywilizacji, np. w rozwoju wysokiej technologii. Bishop w swych publikacjach stawiał kwestię wielorakich związków zachodzących pomiędzy poznaniem matematycznym, edukacją matematyki a rozwojem kulturowym. Matematyka – jego zdaniem – musi się wyzbyć swojego „kompleksu kryzysowego”, dyskusje nad podstawami matematyki uznał za bezowocne, zaś założenia logicyzmu, intuicjonizmu czy formalizmu za przeżyte i kryzysogenne. Mówił też o „matematyce Zachodniej” (*Western Mathematics*), do której włączał matematykę zachodnioeuropejską i amerykańską. Matematyki te – według niego – wyróżniają się swoją odrębnością rozwojową poprzez wieki, ale i współcześnie podkreślają swoją specyfikę kulturową. Bishop wprowadza też pojęcie „imperializmu kulturowego”, co oznacza, że zachodnioeuropejski wzorzec uprawiania matematyki ekspanduje na środowiska naukowe matematyków również na innych kontynentach¹⁸. Poglądy Bishopa w wielu miejscach zbieżne były z poglądami etnomatematyków. Dał temu wyraz w swojej pracy z 1988 roku o „matematycznej enkulturacji”¹⁹. Jak sądził, matematycy żyją (a przez to ich konstrukcje matematyczne powstają) w określonych środowiskach kulturowych oraz etnicznych. Jego zdaniem, w kulturach należy szukać określonych czynności matematycznych

¹⁸ Por. A.J. Bishop, *Western Mathematics: A Secret Weapon of Cultural Imperialism*, „Race and Class”, 1990, vol. 32, nr 2, s. 51–65.

¹⁹ Por. A.J. Bishop, *Mathematical Enculturation*, Dordrecht 1988. Bishop wręcz apelował o konieczność istnienia kultury matematycznej w pracy dydaktycznej, w szeroko rozumianej edukacji matematyki. Por. A.J. Bishop, *Mathematics Education in Its Cultural Context*, „Educational Studies in Mathematics” 1988, vol. 19, s. 179–191.

oraz manipulacji – w pomiarze, oznaczaniu, wyjaśnianiu, grze symboli itp. Dodajmy, że w przypadku matematyki można użyć terminu matematycznego oraz społecznego artefaktu. Są one bowiem produktem indywidualnych oraz grupowych istnień ludzkich oraz zachowań społeczno-kulturowych. Artefakty są czymś naturalnym oraz funkcjonującym jako przedmioty i narzędzia związane z pracą matematyka. Bez uwarunkowań kulturowych – w przekonaniu Bishopa – matematyka faktycznie nie funkcjonuje.

W latach 80. i 90. XX wieku inny matematyk amerykański – Reuben Hirsh stwierdzał, że matematyka jest przejawem ludzkiej aktywności, zjawiskiem społecznym, częścią ludzkiej kultury rozwijającej się historycznie, w szerokim kontekście społecznym, a w tym przypadku zależności są obopólne i wielostronne, często o charakterze relatywnym²⁰. Potwierdzał, podobnie jak inny amerykański matematyk Phillip J. Davis, że dla matematyków powiązania z procesami kulturowymi są zasadnicze i zarazem mają twórcze znaczenie. Wyraz temu dali Davis i Hirsh we wspólnie opublikowanej pracy „o marzeniach matematycznych Kartezjusza”²¹.

Tymczasem inny znany badacz z zakresu filozofii matematyki – Thomas Tymoczko treściowo znacznie rozszerzył konsekwencje relacji zachodzących między rozwojem matematyki i zjawiskami kulturowymi. We wzajemnych zależnościach pomiędzy dyscyplinami matematycznymi a kontekstem kulturowym podkreślał bowiem niezbędną potrzebę akcentowania aspektów humanistycznych oraz utylitarnych matematyki – można zatem w tym przypadku mówić o pewnym androcentryzmie w matematyce. Do „złożonej strategii” poznania matematycznego włączył czynniki społeczne i natury kulturowej. Doceniał rolę filozofii i kultury w matematyce, zarazem jednak wyrażał przekonanie, że „matematyka czysta w swej współczesnej postaci może być uznana za najbardziej oryginalne osiągnięcie ducha ludzkiego”. Oznacza to z kolei, że „ponadczasowe prawdy matematyki” w swym kontekście kulturowo-społecznym mogą zaistnieć „we wszystkich możliwych światach”²².

Tradycyjnie, jak wiadomo, panował pogląd, że matematyka, obok logiki, jest nauką formalną i co najwyżej tylko pośrednio kooperuje z dyscyplinami przyrodniczymi i technicznymi. Ci, którzy uwzględniali kontekst kulturowy

²⁰ Por. R. Hirsh, *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*, „Advance in Mathematics” 1999, vol. 31, s. 31–50.

²¹ Por. P.J. Davis, R. Hirsh, *Descartes' Dream*, London 1988. W pracy tej zawarty jest szeroki dyskurs poruszający kwestię nadmiaru racjonalności w nauce oraz matematyce zachodnioeuropejskiej.

²² Por. T. Tymoczko, *Problem czterech barw i jego znaczenie filozoficzne*, przeł. R. Murawski, w: *Współczesna filozofia matematyki*, dz. cyt., s. 313–340, 332 (cytat). Badania matematyczne zamierzał on, licząc się z nowymi wyzwaniem nauki, umiejętnie połączyć z cywilizacją oraz kulturą komputerową. Człowiek – w jego przekonaniu – powinien nawiązać odpowiedni „dialog” z komputerem.

w naukach matematycznych, zainteresowali się natomiast bardzo ważną kwestią: a mianowicie, czy w kręgu zainteresowań tej nauki nie znajduje się człowiek i ludzkość (*humanity subject*). Było to swoiste spojrzenie na istotę poznania matematycznego. Tradycyjnie matematyków (nie tylko ich zresztą!) interesowała matematyka z dowodowością i zapleczem koncepcyjnym, lecz bynajmniej nie sami jej twórcy – matematycy. Teraz chodziło o pewne „uczłowieczenie” (humanizację) matematyki. Kwestię tę dostrzegą część matematyków, a matematyk amerykański Leslie A. White wprowadził nawet pojęcie „matematyki humanistycznej” (*Humanistic Mathematics*)²³.

W latach 80. i 90. XX wieku w Stanach Zjednoczonych mówiono nawet o tzw. sieci matematyki humanistycznej (*Humanistic Mathematics Network*). Idee „uczłowieczonej” matematyki jako antidotum wobec jej nadmiernej formalizacji i zbyt dużego „idealizowania” nie były obce tzw. amerykańskiej szkole kulturowej w odniesieniu do matematyki.

Dodać należy, że humanistyczne spojrzenie na istotę poznania oraz funkcjonowanie „matematyki ludzkiej” wykazywał także inny znany amerykański filozof i matematyk (chińskiego zresztą pochodzenia) Hao Wang i to znacznie wcześniej, bo już w latach 70. XX wieku²⁴.

Sprawami statusu epistemologicznego, funkcją oraz rolą społeczną, a także oddziaływaniem duchowym (kulturowym) matematyki zajęli się również w latach 80. i 90. XX wieku społeczni konstruktywiści oraz etnomatematycy²⁵. Kierunki te ukształtowały się na gruncie krytyki absolutystycznej filozofii matematyki. Społeczni konstruktywiści działają w dwóch krajach – Wielkiej Brytanii (głównie w ośrodku akademickim Exeter) oraz w Stanach Zjednoczonych. Etnomatematyka zaś rozwija się głównie na gruncie latyno-amerykańskiej filozofii matematyki, a jej twórcą i zarazem promotorem jest brazylijski matematyk – Ubiratan D’Ambrosio. Zwolennicy tych orientacji mówią o ścisłym i wielorakim związku pomiędzy społecznym rodowodem i uwarunkowaniami rozwoju matematyki a jej kulturową „ekologią”. Przyjmują, że w warunkach powszechnych zastosowań matematyki oraz jej wielorakich powiązań z otaczającą rzeczywistością, matematyka jest istotnym

²³ Por. artykuł L.A. White’a, *The Locus of mathematical reality*, „Philosophy of Science” 1947, vol. 14, s. 289–303. Swoją pogląd na rolę systemów kulturowych m.in. w rozwoju koncepcyjnym matematyki White wyłożył w studium z połowy lat siedemdziesiątych: L.A. White, *The Concept of Cultural Systems*, New York 1975.

²⁴ Por. H. Wang, *From Mathematics to Philosophy*, London 1974.

²⁵ Podstawy teoretyczne społecznego konstruktywizmu omówione są w licznych pracach. Por. chociażby studium jednego z jego zwolenników, P. Ernesta, *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, Albany 1998. Także monografia E. Piotrowskiej, *Społeczny konstruktywizm a matematyka*, Poznań 2008. Etnomatematykę omawiam np. w artykule: *Etnomatematyka a próby globalizacji matematyki*, w: R. Murawski (red.), *Filozofia matematyki i informatyki*, Kraków 2015, s. 257–272.

komponentem kultury i życia codziennego człowieka. Uważają, że należy likwidować rozdzźwięk między powszechnie przyjętą matematyczną wiedzą praktyczną a sformalizowaną matematyczną wiedzą akademicką. Podkreślają, że nadal w społeczeństwie i nauce istnieje przekonanie, że matematyka jest oschłą, abstrakcyjna, rozumiana zbyt stereotypowo i w sposób wyidealizowany. Niektórzy zaś sądzą, że jest nauką konserwatywną – statyczną (niezmienną), niezdolną do rozwiązywania wielu pragmatycznie pojmowanych problemów – nie jest twórcza. Matematyka jednak – zdaniem zwolenników tych kierunków, np. Paula Ernesta – powiązana z życiem społecznym i kulturowym może taki swój wizerunek radykalnie zmienić. Współczesna szybko rozwijająca się nauka, wysoka technologia i praktyczna inżynieria optuje za kulturowo-społecznym „obrazem” matematyki. Matematyka w klasycznym ujęciu i kontekstach nie może przecież sprostać zadaniom obecnych „społeczeństw wiedzy”, w krajach o wysoko zaawansowanej technologii, i „społeczeństw informatycznych”. Matematyka staje się odtąd „otwarta” na sprawy społeczne, problemy ekonomiczne, a nawet dylematy natury polityczno-ideologicznej. Paul Ernest np. uważa, że matematyka pomaga społeczeństwom znaleźć nowoczesny (zmodyfikowany) sens życia i jest skutecznym narzędziem do osiągnięcia pełnego zasięgu ludzkich doświadczeń.

Właściwy matematyce uniwersalizm (np. język, metody, dowodzenie) – zdaniem społecznych konstruktywistów – jest zarazem przystosowany do potrzeb „kulturowego dziedzictwa wszystkich ludów”²⁶. Wprawdzie w każdej z kultur matematyka może mieć swój odrębny wkład i dziedzictwo, lecz zarazem matematyka może łączyć pewne kultury w integralną całość, spełniając rolę i funkcję „uniwersalnego łącznika”.

Jak sądzą społeczni konstruktywiści, matematyka znalazła się w uniwersalnym dyskursie kulturowym. Uważają także, że w sensie globalnym i ogólnoludzkim można zakwestionować przekonanie, iż wartość kultury Zachodu (*Western Culture*) i matematyki w niej funkcjonującej jest uniwersalna. Potwierdzają to zresztą studia porównawcze nad matematyką. Stawianie więc na absolutyzujący uniwersalizm matematyki Zachodu jest też z wielu względów ryzykowne, czy nawet niezgodne ze stanem faktycznym. Racjonalna kultura naukowa jest w tym przypadku dominująca. Odmawia się jednak owej „dominacji racjonalności” np. w tradycyjnych kulturach matematycznych arabskiego i hinduskiego kręgu cywilizacyjnego.

²⁶ Por. refleksje P. Ernesta, *The Philosophy of Mathematics Education*, London 1991. W latach 80. i 90. XX wieku społeczni konstruktywiści wywołali ożywiony dyskurs pomiędzy matematykami i filozofami z różnych krajów europejskich, zwłaszcza w odniesieniu do podstaw społecznych i kulturowych uwarunkowań matematyki. Por. pracę zbiorową pod red. wspomnianego Paula Ernesta, *Mathematics Education and Philosophy: An International Perspective*, London 1994.

Można również stawiać pytanie, czy kultura zachodnioeuropejska jest wyższa od kultur: amerykańskiej, kręgu latynoamerykańskiego czy afroazjatyckiego. Można to analizować na przykładzie dominacji matematyki w kulturze Zachodu nad siłami przyrody. Część społecznych konstruktywistów uważa na przykład, że „zachodnia” matematyka akademicka (*Western academic mathematics*) nie jest czymś unikalnym, różnym od matematyki w innych kręgach kulturowych.

Matematyka traktowana jako „system wartości” ma w swej istocie dwa wymiary: międzynarodowy i porównawczy. W pierwszym przypadku postrzegamy kulturę matematyczną jako ponadnarodową, a poprzez system interakcji kulturowej możliwa jest kooperacja matematyki i matematyków z różnych kręgów kulturowych; w drugim zaś zwracamy uwagę na możliwość porównania osiągnięć kultury matematycznej w różnych kręgach kulturowych. Może to dotyczyć np. matematycznych idei oraz koncepcji, aprioryczności wiedzy matematycznej, metod, problemów, kryterium prawdy i ważności itp.

Etnomatematycy mówią nie tylko o wartości kulturowej matematyki, ale również o etnicznej, ważnej np. w historii czy nauczaniu matematyki²⁷. Sądzą bowiem, że zarówno określone koncepcje, idee oraz praktyka matematyczna mają swoje wymiary etniczne. W różnych społeczeństwach i narodach różnie przecież mogą być pojmowane oraz interpretowane takie czynności, jak np. liczenie, porządkowanie, pomiar, waga. Różny może być także w poszczególnych kulturach i narodach stopień rozpowszechniania i wykorzystania np. języka matematycznego, odpowiednich stylów rozumowania, praktyk, wyników i metod naukowych. Nauczanie matematyki także może mieć różne odpowiedniki w poszczególnych narodach i społeczeństwach²⁸. Pedagogiczne implikacje etnomatematyki potwierdzają jednak, że matematyka jest konstrukcją ludzkiego rozumu (*mind*), a ten w swej istocie wykazuje dużo wspólnego podobieństwa. Pedagodzy potwierdzają także, że w różnych kulturach mogą być różnicowane siły kognitywne. Różna może być postawa, uzdolnienia i wyniki uczących się matematyki. W poszczególnych społeczeństwach uczniowie w różny sposób mogą rozwiązywać problemy matematyczne. Czasem jest to uzależnione od rodzimej tradycji i dynamiki kulturowej (czy nawet obyczajowej). Postawa bowiem społeczna, kulturowa i mentalnościowa uczących się matematyki oraz zajmujących się nią naukowo jest różnorodna. Można badać żargon, specyficzne

²⁷ Por. refleksje historyka i filozofa matematyki Marcii Ascher, *Etnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas*, Brooks/Cole 1991.

²⁸ Por. J. Velmink, *The Constructivism Foudation of Ethnomathematics*, w: R. Noss, *Education: Action and Critique*, London 1990, s. 243–247. Także refleksje brazylijskiego matematyka U. D’Ambrosio, *Etnomathematics: the Nature of Mathematics and Mathematics Education*, w: P. Ernest (ed.), *Mathematics, Education and Philosophy. An International Perspective*, London–Washington 1994.

kody, symbolikę tych, którzy uczą się matematyki, prowadzą np. z nauczycielem odpowiedni dyskurs charakteru kulturowego i etnicznego.

Etnomatematyka oferuje szersze spojrzenie na matematykę, praktyki i metody opanowania wiedzy matematycznej, może wskazywać różnorodność środowisk etnicznych i kulturowych, zajmuje się także rodzajami, technikami i metodami osiągnięcia wiedzy w różnych społeczeństwach zróżnicowanych kulturowo i etnicznie. W procesie wyjaśniania i rozumienia czy uczenia i upowszechniania matematyki mogą wystąpić np. odmienności wynikające z rasy, ponadto zróżnicowanie zawodowe i społeczne w poszczególnych społeczeństwach może mieć odmienne konsekwencje. W matematyce spotykamy się z różnymi ideami, koncepcjami, teoriami, refleksjami, a te mogą być różnie zakodowane w poszczególnych społeczeństwach, narodach i oczywiście kulturach narodowych. Style i metody myślenia matematycznego różnią się np. w przypadku narodów wysoko cywilizowanych od społeczeństw pierwotnych, pozbawionych określonych tradycji akademickich. Niektórzy uczeni sądzą, że etnomatematyka ma zastosowanie w odniesieniu do tzw. problemów globalnych, chociaż często abstrakcyjnych i uogólnionych. Dzięki analizie etnomatematycznej, jak zauważa Paul Ernest, matematyka przestaje być wyidealizowaną, tradycyjnie akademicką nauką elit uprzywilejowanych. Etnomatematyka bada różne kultury, środowiska matematyków. Odwołuje się do osiągnięć antropologii, socjologii czy psychologii społecznej, do badań historycznych i etnograficznych (np. funkcjonowanie sposobu liczenia w społeczeństwach pierwotnych).

Wskazałam tylko na niektóre cele i zadania stojące przed „nową filozofią matematyki”. Multietniczność w rozumieniu odbiorców wiedzy matematycznej jest multikulturowością. Matematyka, także współczesna „nowa matematyka”, stanowi potwierdzenie trywialnego przekonania, że dyscypliny matematyczne są jednością (np. w aspekcie pewnych założeń dotyczących dowodzenia, idei, koncepcji, rozumowania) w różnorodności. Ową różnorodność potwierdza recepcja matematyki w różnych kulturach i świadomości zbiorowej różnych narodów.

Dzisiaj jedno jest pewne – tradycyjny, absolutyzujący charakter matematyki przy daleko posuniętym idealizowaniu tej nauki należy odrzucić. Matematyka, jak mało która z nauk, pod każdym względem przystosowuje się do wymogów dzisiejszego zglobalizowanego świata.

Streszczenie

W 1900 roku, na II międzynarodowym kongresie matematyków, wybitny matematyk niemiecki David Hilbert, ogłaszając listę 23 ważnych problemów do rozwiązania, snuł wizję matematyki jako nauki uniwersalnej, pewnej i oczywistej, która rozwiąże każdy problem. Była to odpowiedź uczonego na III kryzys podstaw matematyki. Rodzi się jednak pytanie o to, czy ocena ta odnosi się do matematyki dzisiejszej. Celem mojego artykułu jest nawiązanie do badań tzw. klasycznych kierunków filozofii matematyki (formalizm, intuicjonizm, logicyzm), zwrócenie uwagi na znaczenie twierdzeń K. Gödla dla rozwoju filozofii matematyki oraz na powstanie nowych nurtów (kierunek kulturowy, quasi-empiryzm, społeczny konstruktywizm, etnomatematyka), nadto uwzględnienie tendencji zachodzących w najnowszej nauce i filozofii matematyki, jak i wskazanie na niektóre cele i zadania stojące przed „nową filozofią matematyki”.