

R o m a n M u r a w s k i

Blaise Pascal – matematyk i filozof matematyki

Słowa kluczowe: *definicja, dowód, filozofia matematyki, krzywa stożkowa, maszyna licząca, matematyka, B. Pascal, prawdopodobieństwo, trójkąt Pascala*

Blaise Pascal od wczesnego dzieciństwa wykazywał wyjątkowe zdolności matematyczne – był, można rzec, cudownym dzieckiem w zakresie matematyki. Do historii matematyki przeszło kilka jego dokonań – opowiadanie o nich jest celem tego artykułu. Obok rozważań poświęconych konkretnym problemom technicznym matematyki znajdujemy także u Pascala rozważania filozoficzne (głównie metodologiczne) dotyczące metody naukowej w ogólności, a metod matematyki w szczególności. Sformułował w tym zakresie kilka ważnych zasad i reguł.

Pascal kształcony był w domu. Bardzo wczesnie objawił się jego niezwykle talent matematyczny. Rozwojowi jego zdolności matematycznych nie przeszkodziło nawet to, że w pewnym momencie ojciec, Étienne Pascal, sam interesujący się matematyką i mający na swoim koncie pewne dokonania w tym zakresie¹, zakazał mu dostępu do książek matematycznych – chciał w ten sposób umożliwić rozwój innych niż tylko matematyczne zdolności syna. Nie spowodowało to jednak, że Blaise przestał się interesować matematyką. Przeciwnie, w wieku 12 lat samodzielnie odkrył wiele twierdzeń zawartych w *Elementach* Euklidesa – ojciec więc ustąpił i złagodził swoją postawę; co więcej, podarował mu nawet egzemplarz *Elementów*.

Roman Murawski, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Wydział Matematyki i Informatyki, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań; e-mail: rmur@amu.edu.pl, ORCID: 0000-0002-2392-4869.

¹ Zajmował się m.in. badaniem krzywej zwanej dziś, na jego cześć, ślimakiem Pascala.

W wieku 14 lat Blaise Pascal znalazł się, dzięki ojcu, w kręgu oddziaływań grupy matematyków skupionych wokół franciszkanina Marina Mersenne'a², zwanej też czasem „Akademią Mersenne'a”. Rozważano tam rozmaite kwestie z zakresu filozofii i teologii, jak również fizyki i matematyki. Starano się przy tym – co było cechą wyróżniającą tej epoki – stosować w coraz większym stopniu metody matematyczne w wyjaśnianiu zjawisk naturalnych. Blaise Pascal brał udział w spotkaniach tej grupy nie tylko jako bierny słuchacz, ale – jak wspomina jego siostra Gilberte – „zdarzało się czasami, że odkrywał błędy, na które inni nie zwrócili uwagi” (por. Loeffel 1987, s. 16).

Do grupy skupionej wokół Mersenne'a należał m.in. matematyk i architekt Girard Desargues (1591–1661). Tam też zetknęli się z nim obaj Pascadowie, ojciec Étienne i syn Blaise.

W 1639 roku ukazała się rozprawa Desargues'a zatytułowana *Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cone avec un plan*. Dała ona początek nowemu działowi geometrii, mianowicie tzw. geometrii rzutowej. Celem Desargues'a było podanie pewnych głębszych uogólnień teoretycznych metod graficznych stosowanych między innymi w architekturze i malarstwie i rozwinięcie w ten sposób nauki o perspektywie, czyniąc ją prawdziwą teorią geometryczną. Próbując zrealizować to zadanie, znalazł on ogólne przekształcenie rzutowe, które dawało metodę badania własności i wzajemnej zależności figur. We wspomnianej rozprawie Desargues stosuje właśnie przekształcenia rzutowe, jak również punkty i proste w nieskończoności (rozumiane jako punkt lub prosta przecięcia się pęków prostych równoległych, lub odpowiednio płaszczyzn). Przy tym posługiwał się trochę dziwnym, można nawet powiedzieć: osobliwym, językiem zaczerpniętym z botaniki.

Dzieło Desargues'a zostało przyjęte przez współczesnych raczej z umiarkowanym entuzjazmem. Kartezjusz nie wykazał w ogóle zainteresowania ideą geometrii rzutowej Desargues'a. Pierre Fermat ocenił ją wysoko, ale nie zajął się tą nową dziedziną. Zainteresowała ona jednak młodego Pascala (liczącego wtedy niespełna siedemnaście lat!). Dostrzegł on głębszy sens i znaczenie tej teorii i zaczął ją rozwijać. Udowodnił mianowicie twierdzenie, zwane dziś twierdzeniem Pascala, o sześcioboku wpisanym w stożkową.

Zanim sformułujemy twierdzenie Pascala, przypomnijmy, że krzywe stożkowe to okrąg, elipsa, parabola i hiperbola. Nazwa pochodzi od Apoloniusza

² Nazwisko Mersenne'a zachowało się do dziś w matematyce w nazwie „liczby Mersenne'a”. Postać Mersenne'a jest też ważna w historii matematyki z powodu faktu, że stworzył on niejako ośrodek wymiany myśli w czasach, kiedy nie było jeszcze czasopism matematycznych. Korespondowali z nim m.in. Galileusz, Kartezjusz, Fermat, Desargues, Pascal, Huygens, i wielu innych. Henri Bosmans (1929, s. 143) pisał o tym tak: „Poinformować Mersenne'a o jakimś odkryciu znaczyło rozgłosić je po całej Europie” („Informer Mersenne d'une découverte, c'était la publier par l'Europe entière”).

z Perga (260–170 p.n.e.), który w księdze I swego dzieła *Konika* zdefiniował je jako przekroje (przecięcia) stożka płaszczyzną.

Pascal ogłosił swoje twierdzenie w swej pierwszej (liczącej jedną stronę!) pracy matematycznej *Essay pour les coniques* (Paris 1640)³. Miała ona postać afisza, który wydrukowano w 50 egzemplarzach przeznaczonych do rozdania lub przesłania zainteresowanym uczonym, w szczególności członkom „Akademii Mersenne’a”. *Essay* zawiera trzy definicje, trzy lematy i pięć twierdzeń oraz trzy rysunki. Nie znajdujemy tam dowodów, mimo że każde twierdzenie Pascal zaczyna od słów *nous démonstrerons* („wykażemy”). To, co dziś nazywa się twierdzeniem Pascala, zostało umieszczone w *Essay* jako Lemat 1 (dotyczy przypadku szczególnego stożkowej, czyli okręgu) oraz jako Lemat 3 (ogólny przekrój stożka). W dzisiejszym sformułowaniu twierdzenie to głosi:

Punkty przecięcia prostych zawierających przeciwległe boki sześciokąta wpisanego w krzywą stożkową leżą na jednej prostej⁴.

Prostą, o której mowa w twierdzeniu, nazywa się dziś prostą Pascala. Warto zauważyć, że szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest twierdzenie Pappusa (III w.) o sześciokącie wpisanym w parę prostych⁵. Twierdzenie Pascala zostało docenione przez Desargues’a, który nazwał je „wielkim twierdzeniem – Pascala (*la Pascale*)” (por. Juskiewicz 1976, s. 136).

W *Essay pour les coniques* Pascal twierdzi, że stosując to twierdzenie oraz dwa inne pokrewne jemu, można zbudować pełną teorię krzywych stożkowych. Nigdy jednak nie opublikował tego typu wyników. Prawdopodobnie zawarte one były w jego pracy poświęconej przekrojom stożkowym *Traité de coniques*, której manuskrypt zaginął. Miał go widzieć Gottfried Wilhelm Leibniz w roku 1676. Pisał o tym w liście z 30 sierpnia tegoż roku do Étienne Périera, krewnego Pascala (por. Pascal 1954, s. 63–70); zalecał opublikowanie *Traité* (por. Loeffel 1987, s. 16).

Dodajmy jeszcze, że twierdzenie Pascala, zaliczane do twierdzeń geometrii rzutowej, wystarczy udowodnić w przypadku okręgu (będącego przecież szczególnym przypadkiem krzywej stożkowej) – istotnie, inne krzywe stożkowe mogą być otrzymane z okręgu za pomocą rzutowania.

Jakie znaczenie miało twierdzenie Pascala i jakie były zasługi Pascala dla powstania i rozwoju geometrii rzutowej? Przede wszystkim należy zauważyć, że dał on swoisty impuls geometrii syntetycznej – a działało się to w czasach,

³ Jeden egzemplarz *Essay* zachował się w Bibliothèque Nationale w Paryżu, drugi w Leibniz-Archiv w Hanowerze.

⁴ Oryginalne sformułowanie zawarte w cytowanym afiszu Pascala brzmiało trochę inaczej – podana jednak wyżej forma tego twierdzenia znana była Pascalowi.

⁵ Parę prostych można traktować jako zdegenerowaną krzywą stożkową.

kiedy powstawała geometria analityczna i kiedy w geometrii dominowała właśnie metoda analityczna. Rozwijając pomysły Desargues'a, wskazał Pascal kierunek, w którym można rozwijać geometrię. Niestety idee te nie spotkały się ze zrozumieniem i uznaniem współczesnych. Przebiło się za to podejście analityczne Kartezjusza (por. jego *La Géométrie*, 1637) i geometria oparta na układzie współrzędnych Pierre'a Fermata (por. jego *Ad locos planos et solidos Isagoge*, 1636). Dopiero właściwie w XIX wieku, dzięki pracom Victora Poncelleta i jego kontynuatorów – wspomnieć tu trzeba zwłaszcza matematyka szwajcarskiego Jacoba Steinera – rozwinęła się geometria rzutowa.

Zainteresowania matematyczne Pascala szybko się zmieniały i nie ograniczały się tylko do tzw. matematyki czystej, ale dotyczyły także pewnych kwestii praktycznych, a więc tzw. matematyki stosowanej. U źródeł leżała chęć pomocy ojcu. Otóż ojciec Pascala, zajmujący się na polecenie władz m.in. kwestiami podatkowymi, zmuszony był wykonywać duże i długie obliczenia finansowe. Do pomocy wziął syna. Chcąc ułatwić pracę ojcu i sobie, Blaise zaczął pracować nad konstrukcją maszyny, która pozwoliłaby zmechanizować obliczenia. Chodziło więc o zastąpienie czynności umysłowej, jaką jest rachowanie, przez pracę urządzenia mechanicznego, czyli, innymi słowy, o konstruowanie maszyny, która wykonywałaby podstawowe operacje arytmetyczne i przez to pozwalałaby symulować czynność umysłową rachowania. Patrząc w szerszej perspektywie, można więc tu dostrzec ważną ideę filozoficzną, a mianowicie problem *body-mind*.

Ludzie od dawna próbowali wymyśleć pewne pomoce, które ułatwiałyby wykonywanie obliczeń. Używano więc abaków, liczydeł, pałeczek Nepera czy suwaków logarytmicznych. Wszystkie one wymagały jednak od użytkowników zarówno znajomości wielu, często skomplikowanych reguł, jak i dużej wprawy. Stąd pomysł poszukiwania maszyn liczących, które ułatwiłyby wykonywanie obliczeń i uwolniły człowieka od trudności związanych z korzystaniem z dotychczasowych pomocy rachunkowych. Maszyny takie pojawiły się właśnie w XVII wieku dzięki rozwojowi techniki maszynowej⁶.

Za pierwszą próbę zmechanizowania podstawowych działań arytmetycznych, tzn. dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, uważa się maszynę Wilhelma Schickharda (1592–1635), profesora uniwersytetu w Tybindze, astronoma i kartografa, orientalisty⁷ i matematyka. Dzięki kontaktom z Johannesem Keplrem zainteresował się on matematyką i astronomią. Pozostawali

⁶ Historię prac nad takimi maszynami, jak i opis rozmaitych urządzeń i pomocy wykorzystywanych przy wykonywaniu obliczeń, można znaleźć w książce Izabeli Bondeckiej-Krzykowskiej (2012). W opisie maszyn Schickharda i Pascala, zamieszczonych niżej, opieramy się na tej książce.

⁷ Schickhard kierował katedrą języka hebrajskiego na uniwersytecie w Tybindze, był twórcą bardzo nowoczesnej metody nauczania tego języka – wydana w roku 1623 książka opisująca tę metodę przyniosła mu wielką sławę i doczekała się 40 wydań.

w kontakcie przez wiele lat, aż do śmierci Keplera, prowadząc cały czas regularną korespondencję. Otóż właśnie w liście do Keplera z 20 września 1623 roku Schickhard poinformował go o swoim nowym wynalazku, czyli maszynie liczącej, którą nazywał zegarem liczącym. W liście zaś z 25 lutego 1624 roku podał opis maszyny i zamieścił szkic rysunkowy.

Maszyna zbudowana przez Schickharda składała się z trzech części: dodawczo-odejmującej, mnożącej i części do zapamiętywania wyników. Pozwalała ona na automatyczne wykonywanie dwóch działań, tzn. dodawania i odejmowania, oraz mogła służyć jako pomoc przy wykonywaniu dwóch dalszych działań, czyli mnożenia i dzielenia (to ostatnie dzięki zastosowaniu pałeczek, a właściwie walców Nepera). Niestety maszyna Schickharda spłonęła w zagadkowych okolicznościach niecałe pół roku po jej skonstruowaniu i o wynalazku zapomniano. Dopiero badanie spuścizny Keplera i odnalezienie listów pisanych do niego przez Schickharda zwróciło uwagę badaczy na to dokonanie.

Za autora drugiej w historii maszyny liczącej uchodzi właśnie Pascal – zaprojektowane przez niego urządzenie nazywa się „paskaliną”. Konstrukcję takiej maszyny opracował on w roku 1642. Zasady jej działania były podobne do zasad maszyny Schickharda. W odróżnieniu jednak od maszyny Schickharda, maszyna Pascala ograniczała się do wykonywania tylko dodawania i odejmowania. Koła paskaliny obracały się tylko w jedną stronę. Aby maszyna mogła wykonywać dwa działania, na kołach umieszczono dwa rzędy cyfr. Maszyna mogła więc znajdować się w dwóch trybach. Oryginalny był też system wykonywania mechanicznych przeniesień cyfr do wyższego rzędu, oparty na specjalnym urządzeniu złożonym z systemu kołeczków i zapadek. Ta właśnie cecha wyróżniająca została podkreślona w patencie królewskim z roku 1645. Niestety mechanizm ten okazał się bardzo delikatny i zawodny w praktyce.

Pascal przypisywał swojemu wynalazkowi duże znaczenie. Podkreślał, że paskalina jest niezawodna i prosta w obsłudze. Podjął też próbę komercjalizacji maszyny. Wyprodukowanych zostało około 50 egzemplarzy w różnych wersjach, m.in. zwykłe maszyny sześć- i ośmiocyfrowe, maszyny przystosowane do systemów monetarnych i maszyny dla geometrów, czyli mierniczych. Maszyna nie weszła jednak do powszechnego użytku z powodu wysokich kosztów (około 100 funtów) i trudności w produkcji. Do dziś przetrwało osiem egzemplarzy⁸.

Dodajmy jeszcze, że kolejnym dokonaniem na drodze mechanizacji obliczeń była maszyna Leibniza⁹, zbudowana w 1694 roku w oparciu o plany

⁸ Jeden z egzemplarzy jest własnością firmy IBM, sześć znajduje się we Francji (z tego cztery w Paryżu, w muzeum Konserwatorium Sztuk i Rzemiosł), jeden zaś w Niemczech (w Dreźnie).

⁹ Warto w tym miejscu dodać, że Leibniz pracował nie tylko nad mechanizacją obliczeń, ale zajmował się dużo szerszym projektem. Otóż rozwijany przez niego projekt, zwany *characteris-*

sporządzone 21 lat wcześniej. Pozwalała wykonywać nie tylko dodawanie i odejmowanie, ale także mnożenie, w sposób w pełni automatyczny. Oparta była na całkowicie nowej zasadzie, mianowicie na użyciu walców z zębami nierównej wielkości, zastępujących tradycyjne koła zębate¹⁰.

Osiągnięcie Pascala polegające na pomysłe i konstrukcji maszyny liczącej należy widzieć w świetle dalszego rozwoju technik obliczeniowych aż po dzisiejsze techniki komputerowe i coraz powszechniejszą digitalizację. Choć ówczesny poziom technologiczny nie pozwolił na pełną realizację pomysłu mechanizacji i automatyzacji obliczeń, to dokonany został istotny przełom – pokazano, że pewne czynności właściwe umysłowi człowieka można symulować za pomocą urządzeń czysto mechanicznych. Można zatem nazwać Pascala w pewnym sensie ojcem informatyki. Nie bez powodu więc jeden z bardzo ważnych języków programowania używanych dzisiaj nosi nazwę „Pascal”.

Kolejnym dokonaniem matematycznym związanym z nazwiskiem Pascala jest tzw. trójkąt arytmetyczny, zwany także trójkątem Pascala. Nie jest to oryginalne odkrycie czy dzieło Pascala – w istocie trójkąt arytmetyczny jako taki znany był dużo wcześniej. Można go znaleźć w szczególności u matematyków arabskich (na przykład u Al-Kasziego) czy u matematyków Dalekiego Wschodu (matematycy hinduscy i chińscy). W matematyce europejskiej pojawia się on w wieku XVI. Michael Stifel, *Rechenmeister* (rachmistrz) i kosista, w dziele *Arithmetica integra* (1593) pisze o prawie tworzenia tego trójkąta, który wykorzystuje następnie do wyciągania pierwiastka. Znajdujemy go także u matematyków włoskich Girolama Cardano i Niccolò Fontany (znanego także jako Tartaglia) czy u Simona Stevina, flamandzkiego matematyka, fizyka i inżyniera-wynalazcy. Interesował się nim także wspomniany już Mersenne. Pojawia się też u Pierre’a Hérigone’a (wykładowcy matematyki w Paryżu, a następnie w Lowanium i w Antwerpii), który w dziele *Cursus mathematicus* (1634–1642) stosuje go m.in. do potęgowania dwumianu¹¹. Trójkąt arytmetyczny wykorzystywany był także w rozważaniach kombinatorycznych.

Prace Pascala związane z trójkątem arytmetycznym to seria pod wspólnym tytułem *Traité de triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même matière*. Napisane zostały prawdopodobnie w roku 1654, ale opublikowane dopiero pośmiertnie, w Paryżu w roku 1665.

tica universalis („powszechna symbolika”), będący częścią szerszego pomysłu nazywanego *calculus universalis* („powszechny rachunek”), miał na celu stworzenie uniwersalnego języka graficznego oraz metody rachunkowej (sprowadzającej się do przekształcania napisów w tym języku wedle z góry ustalonych reguł), która miała pozwolić na rozwiązywanie wszelkich problemów naukowych (a więc miała symulować wszelkie rozumowania). Por. Bedürftig, Murawski 2010, 2018; Murawski 1995; Marciszewski, Murawski 1995.

¹⁰ Oryginalny egzemplarz maszyny Leibniza z roku 1694 przechowywany jest w muzeum w Hanowerze.

¹¹ Wydaje się, że to właśnie Pierre Hérigone miał bezpośredni wpływ na Pascala.

Co to jest trójkąt arytmetyczny, czyli trójkąt Pascala? W ujęciu współczesnym jest to następująca nieskończona tablica liczb¹²:

0										1									
1										1	1								
2										1	2	1							
3										1	3	3	1						
4										1	4	6	4	1					
5										1	5	10	10	5	1				
6										1	6	15	20	15	6	1			
7										1	7	21	35	35	21	7	1		
8										1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9										1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
...																			

Na początku i na końcu każdego wiersza stoi liczba 1, a pozostałe liczby w danym wierszu są zawsze sumą dwu liczb znajdujących się bezpośrednio nad nimi. Liczby stojące w wierszu n -tym to kolejne współczynniki dwumianu Newtona, czyli współczynniki rozwinięcia $(x + y)^2$. Z drugiej strony, jeśli liczyć poszczególne wiersze i elementy tych wierszy od zera, to liczba stojąca na miejscu k w wierszu n jest równa współczynnikowi dwumianowemu, który oznacza się zwykle symbolem Newtona $\binom{n}{k}$ lub też jako C_k^n . Jest on równy liczbie wszystkich k -elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego, czyli liczbie wszystkich k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego. Dodajmy jeszcze ważną zależność, a mianowicie wzór:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dla $0 \leq k \leq n$, gdzie wykrzyknik oznacza silnię, tzn. iloczyn wszystkich liczb od 1 aż do danej liczby, czyli $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Powiedzmy jeszcze o jednej własności liczb z trójkąta Pascala, mianowicie o tzw. liczbach figuralnych. Jak widać, na skrajnych bocznych rzędach trójkąta są same jedynki. W kolejnym skrajnym bocznym rzędzie są kolejne liczby naturalne 1, 2, 3, 4, ..., w drugim skrajnym rzędzie mamy tzw. liczby trójkątne 1, 3, 6, 10, ... (czyli takie, że jeśli reprezentować je za pomocą kulek, to można ułożyć je w kształt wypełnionego trójkąta równobocznego), w trzecim skrajnym rzędzie – tzw. liczby piramidalne 1, 4, 10, 20, 35, ... (czyli liczby podające, ile kulek potrzeba, by utworzyć z nich czworościan foremny),

¹² W oryginalnym przedstawieniu Pascala trójkąt ten wyglądał trochę inaczej – aby otrzymać tę oryginalną postać, należy obrócić poniższą tabelę o 45° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

w czwartym skrajnym rzędzie – liczby określające liczbę kul w czworościanie w przestrzeni czterowymiarowej, itd.

Na czym polegał wkład Pascala w badanie zagadnień związanych z trójkątem arytmetycznym? Otóż można jego wkład widzieć dwojako. Z jednej strony było to systematyczne badanie własności strukturalnych tego trójkąta, z drugiej zaś rozważanie rozmaitych jego zastosowań. Pascal udowodnił w szczególności, że:

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

oraz że:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

jak również, że $\binom{n}{k}$ jest współczynnikiem przy $x^k y^{n-k}$ w rozwinięciu dwumianu $(x + y)^n$.

Badając własności trójkąta, Pascal podawał jasne i pełne dowody tych własności, zwracając przy tym uwagę na istotne znaczenie zasady indukcji matematycznej zupełnej¹³ – wydaje się, że jako pierwszy używał jej w sposób wyraźny. Jeśli zaś chodzi o zastosowania trójkąta, to są one bardzo szerokie – znajduje on zastosowanie w teorii liczb figurowych, w kombinatoryce, w potęgowaniu dwumianu czy wreszcie w zagadnieniach związanych z grami losowymi i rachunkiem prawdopodobieństwa (problem podziału). Właśnie to ostatnie jest tu szczególnie ważne z punktu widzenia wkładu Pascala. Jest on bowiem uważany za jednego ze współtwórców teorii prawdopodobieństwa – drugim współtwórcą był Pierre Fermat (1601–1665), francuski prawnik i matematyk-amator.

Problem gier losowych interesował ludzi od dawna – związany był przecież z zagadnieniami pojawiającymi się w praktyce, od dawna bowiem ludzie grali w rozmaite gry. W szczególności interesowano się kwestią prawdopodobieństwa wygranej przy danej stawce. Rzecz jasna, problem zainteresował też matematyków. Do XVII wieku nie było jednak żadnej ogólnej metody rozwiązywania tego typu problemów, a pojawiające się propozycje rozwiązań nie były zadowalające. Wśród rozważanych problemów był m.in. tzw. problem podziału stawki przy przerwanej grze. W druku problem ten sformułował po raz pierwszy franciszkanin Luca Paccioli w swojej *Summa de arithmetica* w roku 1494. Zagadnieniem zajmowali się później m.in. Girolamo Cardano, Niccolò Tartaglia i Galileusz. Uwagę Pascala na ten problem zwrócił Antoine

¹³ Warto może dodać, że sama nazwa „indukcja matematyczna” pojawiła się dużo później – spotykamy ją w artykule Augusta De Morgana z roku 1838.

Gombaud Chevalier de Méré, pisarz francuski działający na dworze Ludwika XIV. Pascal podał pewne rozwiązanie, które nie zadowoliło de Mérégo – wydawało mu się niezgodne z jego własnymi obserwacjami praktykującego gracza. Pascal napisał o tym fakcie w liście z 29 lipca 1654 roku do Pierre’a Fermata, skarżąc się na słabą znajomość matematyki wśród arystokracji. List ten dał początek późniejszej wymianie myśli i współpracy Pascala i Fermata, która doprowadziła do stworzenia podstaw teorii prawdopodobieństwa.

Pascal i Fermat rozważali m.in. problem podziału stawki przy przerwanej grze losowej (*problème des partis*). Obaj doszli do tego samego poprawnego rozwiązania, choć każdy nieco innym sposobem¹⁴. Zaproponowali metodę probabilistyczną, sprowadzającą się do tego, że stawkę dzieli się proporcjonalnie do prawdopodobieństwa wygrania całej stawki, gdyby gra nie została przerwana i doprowadzono by ją do końca. Pascal zwrócił też uwagę na związek zagadnienia prawdopodobieństwa z trójkątem arytmetycznym. Istotnie, odpowiednie prawdopodobieństwo w problemie podziału stawki daje się wyrazić za pomocą liczb z trójkąta, tzn. liczb postaci $\binom{n}{k}$, czyli C_k^n . Zilustrujmy to następującym przykładem. Rozważmy grę polegającą na tym, że dwóch graczy rzuca monetą. Jeśli wypadnie awers monety, to Gracz I zyskuje 1 punkt, jeśli zaś rewers, to Gracz II uzyskuje 1 punkt. Uzgodniono, że pierwszy z graczy, który uzyska 100 punktów, otrzyma nagrodę w wysokości 1000 złotych. Załóżmy, że Gracz I zdobył $100 - m$ punktów, a Gracz II zdobył $100 - n$ punktów. Jakie jest prawdopodobieństwo $f(m, n)$ tego, że Gracz I wygra? Pascal pokazał, że jeśli $r = m + n - 1$, to wtedy:

$$f(m, n) = \frac{\binom{r}{0} + \binom{r}{1} + \dots + \binom{r}{n-1}}{2^r}$$

Ani Pascal, ani Fermat nie opublikowali swoich wyników – znamy je jedynie z ich (niepełnej zresztą) korespondencji. Pascal zamierzał wprawdzie napisać książkę *Matematyka przypadku*, w której chciał systematycznie wyłożyć uzyskane przez siebie i przez Fermata wyniki (por. Juskiewicz 1976, s. 98), ale nie zrealizował tego pomysłu. Niemniej jednak obu uczonych możemy uznać za współtwórców teorii prawdopodobieństwa jako teorii matematycznej. Dodajmy, że rachunek prawdopodobieństwa rozwijał się dalej bardzo intensywnie. Idee Pascala i Fermata podjął w szczególności matematyk holenderski Christiaan Huygens (1629–1695), który w czasie pobytu w Paryżu w roku 1655 dowiedział się o badaniach tych uczonych i zaczął prowadzić własne.

¹⁴ Pascal napisał w związku z tym w liście do Fermata z 29 lipca 1654 roku: „Stwierdzam, że w Tuluzie i w Paryżu obowiązuje ta sama prawda” („Je vois que la vérité est la même à Toulouse et à Paris”) (por. Pascal 1954, s. 77). Dodajmy, że Fermat mieszkał i pracował w Tuluzie.

Ich wyniki zawarł w napisanej po niderlandzku pracy *Van reckeningh in spelen van geluck* – jej łaciński przekład zatytułowany *De ratiociniis in ludo aleae* został opublikowany jako dodatek do *Studiów matematycznych* jego nauczyciela Fransa van Schootena w roku 1657. Huygens wprowadził tam m.in. pojęcie nadziei matematycznej (było to pierwsze pojęcie teoretyczne teorii prawdopodobieństwa). Badania nad prawdopodobieństwem kontynuowane były m.in. przez Jacoba Bernoulliego (1655–1705) i później przez wielu innych matematyków (Abraham De Moivre, Nicolas de Condorcet, Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Pierre Simon Laplace, Carl Friedrich Gauss, Henri Poincaré). W XX wieku kształt w pełni dojrzałej teorii matematycznej nadał rachunkowi prawdopodobieństwa matematyk rosyjski Andriej Kołmogorow w opublikowanej w roku 1933 pracy *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Teoria ta odgrywa dziś bardzo ważną rolę nie tylko teoretyczną, lecz także praktyczną. A wszystko zaczęło się przecież od rozważań Pascala (zainspirowanego pytaniem de Mérégo) i Fermata, związanych z grami hazardowymi¹⁵. Zasługi Pascala¹⁶ dla rozwoju tej teorii zostały podkreślone przez funkcjonujący dziś w rachunku prawdopodobieństwa termin „rozkład Pascala” (ujemny rozkład dwumianowy).

Mówiąc o Pascalu jako matematyku i o jego wkładzie w rozwój tej dyscypliny, trzeba jeszcze powiedzieć kilka słów o jego dokonaniach związanych z rachunkiem nieskończoności. Zagadnienia tego typu pojawiały się w matematyce już od starożytności – wspomnieć tu trzeba przede wszystkim Archimedes (287–212 p.n.e.) i jego prace nad wyznaczaniem pól powierzchni figur i objętości brył. Przy tym podkreślić należy, że Archimedes wyznaczał pola i objętości, posługując się pewnymi rozumowaniami mechanistycznymi i eksperymentem (nie tylko zresztą myślowym), a następnie uzasadniał swoje stwierdzenia, wykorzystując Eudoksosa metodę wyczerpywania. Nie wypracował więc żadnej metody matematycznej znajdowania pól i objętości. Niemniej jednak trzeba docenić prace Archimedes (287–212 p.n.e.) i jego prace nad wyznaczaniem pól powierzchni figur i objętości brył. Przy tym podkreślić należy, że Archimedes wyznaczał pola i objętości, posługując się pewnymi rozumowaniami mechanistycznymi i eksperymentem (nie tylko zresztą myślowym), a następnie uzasadniał swoje stwierdzenia, wykorzystując Eudoksosa metodę wyczerpywania. Nie wypracował więc żadnej metody matematycznej znajdowania pól i objętości. Niemniej jednak trzeba docenić prace Archimedes (287–212 p.n.e.) i jego prace nad wyznaczaniem pól powierzchni figur i objętości brył.

W połowie XVII wieku daje się zauważyć wzrost zainteresowania matematyków rachunkiem całkowym i metodami nieskończonościowymi. Wspomnieć należy przede wszystkim matematyka włoskiego Bonaventurę Cavaleriego (1598–1647), ucznia Galileusza, i jego „geometrię niepodzielną”. Jego

¹⁵ Warto w tym kontekście przytoczyć słowa matematyka francuskiego Siméona Denisa Poissona, który w *Recherches sur la probabilité* (1837, s. 1) napisał: „Problem dotyczący gier hazardowych postawiony surowemu jansenizmowi przez człowieka światowego zapoczątkował rachunek prawdopodobieństwa” („Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste par un homme du monde, a été l’origine du calcul des probabilités”).

¹⁶ Użycia zasad teorii prawdopodobieństwa można się też dopatrywać w słynnym zakładzie Pascala z jego *Myśli* (Pascal 1972, fragm. 451, s. 193–199).

praca *Geometria indivisibilibus continuorm nova quadam ratione promota* (1635) zapoczątkowała nowy etap w rozwoju rachunku nieskończenie małego.

W nurt ten włączył się także Pascal, zajmując się tego typu zagadnieniami w ostatnim okresie swojego życia, tzn. po roku 1657. Interesowały go głównie kwestie związane z kwadraturą, rektyfikacją czy wyznaczaniem środka ciężkości, a nie zajmował się na przykład kwestią styčných. Przy tym przedstawiał swoje pomysły w sposób całkowicie werbalny, ignorując zupełnie symbolikę algebraiczną, która pozwalałaby na zwięzłą i przejrzystą prezentację wyników¹⁷. Prowadziło to do skomplikowania wypowiedzi i ograniczało możliwości rozszerzenia zakresu badań. Trzeba jednak przyznać, że nawet taka skomplikowana prezentacja wyników cechowała się precyzją i jasnością¹⁸.

Pascal nie zajmował się w sposób systematyczny zagadnieniami omawianego typu, raczej mówić tu się powinno o przyczynkach, aczkolwiek interesujących i ważnych. Nie możemy wchodzić w skomplikowane szczegóły techniczne wyników Pascala. Powiedzmy więc tylko, że większość z nich dotyczy kwadratury, kubatury i wyznaczania środków ciężkości związanych z cykloidą, czyli krzywą określaną przez ustalony punkt „toczącego się” okręgu – por. jego pracę *Traité général de la Roulette* (1659). Uzyskał te wyniki za pomocą operacji odpowiadających – w dzisiaj używanym języku – całkowaniu i przekształcaniu całek potęg sinusów i niektórych przypadków szczególnych funkcji postaci $(1 - x^2)^{n/2} x^n$. Stosował przy tym zamianę zmiennych i całkowanie przez części.

Warto też wspomnieć tu pracę Pascala *Traité des sinus du quart de cercle*. Jest ona ważna z tego powodu, że miała wpływ na Leibniza, współtwórcę (razem, ale niezależnie, z Izaakim Newtonem) rachunku różniczkowego i całkowego. Otóż Leibniz zapoznał się z tą pracą w roku 1673 za radą Huygensa i zwrócił w niej uwagę na pewien rozważany tam trójkąt, który nazwał charakterystycznym. Sam Pascal, zdaniem Leibniza, nie dostrzegł znaczenia tego trójkąta. Za jego pomocą można było m.in. obliczyć pola dowolnych powierzchni obrotowych. Matematycy posługiwali się wprowadzając już wcześniej takimi trójkątami, ale dopiero u Pascala operowanie nim jest tak wyraźne¹⁹.

Pascal zajmował się nie tylko konkretnymi problemami matematycznymi (co wyżej opisaliśmy). Znajdujemy u niego także refleksję nad matematyką

¹⁷ Czyżby dał tu o sobie znać fakt, że Fermat i Roberval, przyjaciele Pascala, byli w złych stosunkach z Kartezjuszem, promotorem nowej symboliki matematycznej?

¹⁸ Bourbaki pisze o tym: „Język Pascala jest szczególnie jasny i ścisły; i choć niezrozumiałe jest, dlaczego nie chciał używać znakowania algebraicznego, nie tylko Kartezjusza, lecz nawet Viète’a, to można tylko podziwiać wyczyn, jakiego przy tym dokonuje, i który umożliwiło mu jedynie mistrzostwo języka” (Bourbaki 1969; przekład polski 1980, s. 239).

¹⁹ Wydaje się, że Pascal był bliski rachunku różniczkowego i całkowego. Leibniz pisał, że kiedy czytał *Traité des sinus du quart de cercle*, nagle doznał ośnienia (por. Boyer, Merzbach 1989, s. 406).

jako nauką, w szczególności refleksję metodologiczną. Można go więc śmiało nazwać także filozofem matematyki (por. np. Murawski 1995; Bedürftig, Murawski 2010; Felgner 2020).

Swoje przemyślenia filozoficzne dotyczące matematyki zawarł Pascal głównie w dwuczęściowej rozprawie powstałej prawdopodobnie w latach 1655–1658 (opublikowanej pośmiertnie), zatytułowanej *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*²⁰. Rozważa tam przede wszystkim uznawaną za właściwą i stosowaną w matematyce, a zaproponowaną już przez Arystotelesa, metodę aksjomatyczno-dedukcyjną. Dostrzec też można w tej rozprawie rozmaite paralele do *Rozprawy o metodzie* Kartezjusza.

Pascal uważał – podobnie jak Kartezjusz – że w porządku rozumu wzorcem myślenia i postępowania winna być matematyka, w szczególności zaś geometria. Doceniał wprawdzie wartość poznawczą doświadczenia i indukcji, ale poszukiwał metody bardziej niezawodnej i tę widział właśnie w matematyce. Pisał w rozprawie *O geometrycznym sposobie myślenia* (*De l'esprit géométrique*)²¹:

Jest to bowiem jedyna dziedzina nauki ludzkiej, która przytacza dowody niezbite, gdyż ona jedna jest naprawdę metodyczna, podczas gdy we wszystkich innych z przyrodzonej konieczności panuje jakiś zamęt, którego są w pełni świadomi tylko geometryści (Pascal 1962, s. 117)²².

Metoda, którą stosuje matematyka i która winna być wzorcem wszelkiej nauki, opiera się wedle Pascala na dwóch generalnych zasadach:

- nie należy używać żadnego terminu, którego znaczenie nie zostało wcześniej dokładnie ustalone;
- wszystkie stwierdzenia muszą być udowodnione.

Znaczenie definicji polega na tym, że „upraszczają [one] i skracają wypowiedzi i czynią je jaśniejszymi, gdyż jedną nadaną nazwą wyrażają to, co inaczej można by wypowiedzieć tylko za pomocą wielu słów”²³ (Pascal 1962, s. 117). Pascal zauważa przy tym, że w zasadzie definicje mogą być zupełnie dowolne. Istotnie, możemy przecież daną rzecz nazwać „tak, jak nam się podoba” (*tel qu'on voudra*) (Pascal 1962, s. 118). Należy tylko pamiętać, by

²⁰ Przekład polski: *Rozważania ogólne nad geometrią* (Pascal 1962, s. 113–156). Fragmenty także w: Murawski 1986, s. 71–87.

²¹ Zamieszczone tutaj i poniżej oryginały cytatów podajemy według wydania: Pascal 1979.

²² „qui est presque la seule des sciences humaines qui en produise d'infailibles, parce qu'elle seule observe la véritable méthode, au lieu que toutes les autres sont par une nécessité naturelle dans quelque sorte de confusion que les seuls géomètres savent extrêmement reconnaître”.

²³ „d'éclaircir et d'abrégier le discours, en exprimant, par le seul nom qu'on impose, ce qui ne pourrait se dire qu'en plusieurs termes”.

tym samym terminem nie nazywać dwóch różnych obiektów. Definicje formułuje się przecież tylko po to, by „oszczędzić słów, a nie po to, by zubożyć lub przeinaczyć ideę rzeczy, o której mówią”²⁴ (Pascal 1962, s. 119).

Pascal zdawał sobie oczywiście doskonale sprawę z tego, że nie da się zdefiniować wszystkich pojęć i dowieść wszystkich twierdzeń. Coś musi być dane na początku, coś, na czym można się oprzeć. Dlatego też dopuszcza przyjęcie pewnych pojęć bez definicji, jako pierwotnych (*mots primitifs*). Winny one być jasne i intersubiektywnie zrozumiałe w ten sam sposób przez wszystkich, którzy posługują się danym językiem. Do takich pojęć zalicza w szczególności pojęcie przestrzeni, czasu, ruchu, liczby czy równości (*espace, temps, mouvement, nombre, égalité*). Podkreśla, że można je przyjąć jako pojęcia pierwotne, gdyż „sama natura dała nam bez słów jaśniejsze pojęcie tych rzeczy niż to, które mogą nam dać nasze kunsztowne objaśnienia”²⁵ (tamże). Co więcej, natura obdarzyła wszystkich ludzi podobnymi ideami. Ten rodzaj wiedzy nazywa Pascal *sentiment du coeur*, czyli pewną wiedzę uzyskaną w „porządku serca”, wychodzącą poza porządek rozumu (łac. *ratio*). Są one jasne dzięki, jak pisze, „światłu naturalnemu” (*la lumière naturelle*). Nie wyjaśnia jednak, czym jest to „światło naturalne” i w jaki sposób można by je kontrolować.

Wychodząc od *mots primitifs*, można wedle Pascala określić wszystkie pozostałe pojęcia matematyki za pomocą definicji nominalnych. Przyjmując jako pojęcie pierwotne pojęcie liczby, podał jako przykład zwykłą definicję pojęcia „liczba parzysta”.

Podobnie rzecz się ma według Pascala z zasadami, które stanowić mogą oparcie i punkt wyjścia dla dowodów twierdzeń, czyli z prawdami pierwotnymi, aksjomatami. Są one jasne dzięki „światłu naturalnemu”, czujemy je sercem. Samo zaś wyprowadzanie twierdzeń opiera się na dowodach, czyli odbywa się w porządku rozumu. W *Myślach* pisał²⁶:

Poznajemy prawdę nie tylko rozumem, ale i sercem, w ten sposób znamy pierwsze zasady i na próżno rozumowanie, które nie ma w tym udziału, sili się je zwalczyć. [...] I na tych wiadomościach serca i instynktu musi się oprzeć rozum i na nich budować wszystkie swoje wywody. [...] Zasady czujemy, twierdzenia wyprowadzamy za pomocą dowodu (Pascal 1972, fragm. 479, s. 205–206)²⁷.

²⁴ „pour abrégier le discours, et non pour diminuer ou changer l'idée des choses dont ils discourent”.

²⁵ „la nature nous en a elle-même donné, sans paroles, une intelligence plus nette que celle que l'art nous acquiert par nos explications”.

²⁶ Zamieszczone tutaj i poniżej oryginały cytatów z *Pensées* podajemy według: Pascal 1897.

²⁷ „Nous connaissons la vérité, non seulement par la raison, mais encore par le cœur ; c'est de cette dernière sorte que nous connaissons les premiers principes, et c'est en vain que le raisonnement qui n'y a point de part essaye de les combattre. [...] Et c'est sur ces connaissances

Przy tym porządek serca i porządek rozumu są tu niejako autonomiczne i wzajemnie nieredukowalne. Nie można żądać od serca, by dowiodło pierwszych zasad, podobnie jak nie można żądać od rozumu czucia wszystkich twierdzeń. Pisał Pascal w *Mysłach*:

I równie bezcelowe i niedorzeczne jest, aby rozum żądał od serca udowodnienia pierwszych zasad, nim zgodzi się na nie przystać, jak byłoby niedorzeczne, aby serce – nim zgodzi się je przyjąć – żądało od rozumu czucia wszystkich twierdzeń, które ten udowadnia (Pascal 1972, fragm. 479, s. 206)²⁸.

W drugiej części omawianej rozprawy, tzn. *O sztuce przekonywania* (*De l'art de persuader*), rozważa Pascal jeszcze raz, choć teraz w sposób bardziej precyzyjny i szczegółowy niż w części pierwszej, tj. w *O geometrycznym sposobie myślenia*, matematyczny sposób myślenia. Zaczyna od wstępnego różnienia władzy rozumu i władzy woli. Pisz:

[...] przekonania mają przystęp do duszy dwiema drogami, poprzez dwie główne władze: rozum i wolę. W lepszej zgodzie z naturą jest droga rozumu, powinniśmy bowiem uznawać za słuszne to tylko, co dowiedzione (Pascal 1962, s. 140)²⁹.

I w dalszym ciągu zajmuje się głównie drogą rozumu, czyli, jak ją nazywa, sztuką przekonywania, „która właściwie polega jedynie na przeprowadzaniu dowodów metodycznych i zupełnych” (Pascal 1962, s. 145)³⁰. Opiera się ona na trzech zasadach: należy (1) jasno zdefiniować terminy, którymi się posługujemy, (2) podawać zasady i aksjomaty, na których oparte są nasze wywody, (3) przy dowodzeniu w miejsce nazw wprowadzać w myśli ich definicje. Należy przy tym unikać używania terminów „choćby tylko trochę niejasnych lub wieloznacznych” (*un peu obscurs ou équivoques*) bez ich uprzedniego zdefiniowania oraz wprowadzania zasad, nawet zdawałoby się jasnych i oczywistych, bez sprawdzenia, czy wszyscy je uznają. Z drugiej zaś strony nie należy próbować definiować terminów doskonale znanych i jasnych same przez się czy dowodzić prawd powszechnie przyjmowanych.

W dalszym ciągu Pascal formułuje w sumie osiem reguł – dla definicji, dla aksjomatów i dla dowodów. Warto je tu przytoczyć:

du cœur et de l'instinct qu'il faut que la raison s'appuie, et qu'elle y fonde tout son discours. [...] Les principes se sentent, les propositions se concluent”.

²⁸ „Et il est aussi inutile et aussi ridicule que la raison demande au cœur des preuves de ses premiers principes, pour vouloir y consentir, qu'il serait ridicule que le cœur demandât à la raison un sentiment de toutes les propositions qu'elle démontre, pour vouloir les recevoir”.

²⁹ „[...] il y a deux entrées par où les opinions sont reçues dans l'âme, qui sont ses deux principales puissances, l'entendement et la volonté. La plus naturelle est celle de l'entendement, car on ne devrait jamais consentir qu'aux vérités démontrées”.

³⁰ „qui n'est proprement que la conduite des preuves méthodiques parfaites”.

Prawidła dotyczące definicji: 1. Nie definiować rzeczy, które są tak dobrze znane same przez się, że nie sposób znaleźć terminów jeszcze jaśniejszych, mogących posłużyć do ich wytłumaczenia. 2. Nie wprowadzać bez uprzedniego zdefiniowania terminów choćby tylko trochę niejasnych lub wieloznacznych. 3. Definiując terminy używać tylko słów doskonale znanych lub już wyjaśnionych.

Prawidła dotyczące aksjomatów: 1. Nie wprowadzać żadnej z niezbędnych zasad, choćby jak najbardziej jasnej i oczywistej, nie spytawszy wpraw, czy wszyscy ją uznają. 2. Przyjmować za aksjomat tylko rzeczy same przez się najzupełniej oczywiste.

Prawidła dotyczące dowodów: 1. Nie dowodzić rzeczy, które są same przez się tak oczywiste, że nie znajdziemy nic jeszcze jaśniejszego, co mogłoby posłużyć do ich udowodnienia. 2. Dowodzić wszystkich twierdzeń choćby tylko trochę niejasnych, posługując się przy tym wyłącznie aksjomatami zupełnie oczywistymi lub twierdzeniami uprzednio uzgodnionymi lub dowiedzionymi. 3. Zawsze podstawiać w myśli definicje w miejsce terminów, aby się nie dać zwieść ich wieloznaczności, przed którą te definicje zabezpieczają (Pascal 1962, s. 147)³¹.

Pascal zdaje sobie sprawę, że sformułowane przez niego zasady można uznać za banalne i niezbyt użyteczne, bo w istocie ograniczone w swych zastosowaniach do matematyki. Są one proste, ale nie są zbytnio rozpowszechnione, gdyż „jeśli wyłączymy geometrów, którzy są tak nieliczni, że – rozproszeni wśród narodów i wśród niezliczonych lat historii – stanowią wyjątek, nie znajdziemy nikogo innego, kto by je również znał”³² (Pascal 1962, s. 150). Jest jednak przekonany, że stanowią one wzorzec i model wszelkiej wiedzy racjonalnej.

Pascal wpisuje się więc swymi rozważaniami metodologicznymi w nurt rozważań zapoczątkowany przez Arystotelesa, który sformułował zasady metodologiczne dotyczące teorii naukowych, w szczególności sprecyzował zasady dotyczące metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Nie wszystkie rozważania Pascala, a zwłaszcza ich uzasadnienia, są przekonujące i jasne (na przykład zasada „światła naturalnego”), niemniej jednak do dziś niczego lepszego nie wymyślono i dalej one obowiązują. Zostały jedynie w logice matematycznej doprecyzowane – zarówno jeśli chodzi o język teorii naukowych, w szczególności język matematyki, jak i o metody dowodowe.

³¹ „*règles pour les définitions*. – 1. n’entreprendre de définir aucune des choses tellement connues d’elles-mêmes, qu’on n’ait point de termes plus clairs pour les expliquer. 2. n’admettre aucun des termes un peu obscurs ou équivoques, sans définition. 3. n’employer dans la définition des termes que des mots parfaitement connus, ou déjà expliqués.

règles pour les axiomes. – 1. n’admettre aucun des principes nécessaires sans avoir demandé si on l’accorde, quelque clair et évident qu’il puisse être. 2. ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes d’elles-mêmes.

règles pour les démonstrations. – 1. n’entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d’elles-mêmes qu’on n’ait rien de plus clair pour les prouver. 2. prouver toutes les propositions un peu obscures, et n’employer à leur preuve que des axiomes très évidents, ou des propositions déjà accordées ou démontrées. 3. substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis, pour ne pas se tromper par l’équivoque des termes que les définitions ont restreints”.

³² „en excepte les seuls géomètres, qui sont en si petit nombre qu’ils sont uniques en tout un peuple et dans un long temps, on n’en voit aucun qui le sache aussi”.

Dodajmy, że zasady sformułowane przez Pascala legły u podstaw dzieł Antoine'a Arnaulda *La logique, ou l'art de penser* (1662) i *Nouveaux éléments de géométrie* (1667). Dzieła te przyczyniły się do rozpowszechnienia idei Pascala, a ich oddziaływanie nie ograniczało się tylko do współczesnych. Jeszcze w XX wieku dostrzec można ich wpływ i znaleźć ich zwolenników. I tak na przykład Émile Borel (1871–1956) w swoich *Leçons sur les fonctions de variables réelles* (1905) pisał:

Pojęcie zbioru jest pojęciem pierwotnym, którego nie będziemy definiowali. Chcemy podać jedynie kilka przykładów zbiorów: zbiór wszystkich punktów prostej, itd. (Borel 1905, s. 1)³³.

Podobnie Felix Hausdorff (1868–1942) zaraz na początku swojej książki o teorii mnogości (*Mengenlehre*) zaznaczał:

Zbiór powstaje przez zebranie razem pojedynczych obiektów w jedną całość. Zbiór jest wielością pomyślaną jako jedność. Jeśli te czy podobne zdania chcielibyśmy traktować jako definicje, to powstaje słuszny zarzut, że mamy tu do czynienia z definiowaniem *idem per idem* czy *obscurum per obscurum*. Możemy jednak traktować je jako prezentację, jako wskazanie na pierwotny, wspólny wszystkim ludziom akt myślowy, który nie daje się sprowadzić, ani nie musi być sprowadzony do jeszcze pierwotniejszych aktów (Hausdorff 1927, s. 11)³⁴.

Podejście zgodne ze wskazówkami Pascala dostrzec też można i dziś w potocznym rozumieniu aksjomatów i teorii aksjomatycznych. Otóż potocznie przez aksjomaty rozumie się prawdy oczywiste. Często też zamiast terminu „aksjomat” używa się słowa „pewnik”, co ma podkreślać niepodważalny charakter danego zdania. Co to jednak znaczy „oczywiste”? Czy odwołać się tu należy do intuicji? Czy intuicja rozstrzygać powinna, co można uznać za aksjomat? Tu jednak rodzi się nowa trudność, a mianowicie problem intuicji, jej natury, pochodzenia, intersubiektywności itd. Czy może raczej decydować powinno to, czy dany aksjomat okazuje się przydatny w praktyce badawczej w danej dziedzinie i pozwala na rozstrzygnięcie większej liczby problemów? Tak jest na przykład z aksjomatem wyboru. Z jednej strony jest on bardzo użyteczny w wielu działach matematyki, ale z drugiej prowadzi do zaskakujących i niezgodnych z intuicją konsekwencji. A co w sytuacji, gdy intuicyjne rozumienie jest tak niejednoznaczne i nieprecyzyjne, że przyczynia się do

³³ „L'idée d'ensemble est une notion primitive dont nous ne donnerons pas de définition. Citons seulement quelques exemples d'ensembles : l'ensemble des points d'une droite, etc”.

³⁴ „Eine Menge entsteht durch Zusammenfassung von Einzeldingen zu seinem Ganzen. Eine Menge ist eine Vielheit, als Einheit gedacht. Wenn diese oder ähnliche Sätze Definitionen sein wollen, so würde man mit Recht einwenden, dass sie *idem per idem* oder *obscurum per obscurum* definieren. Wir können sie aber als Demonstrationen gelten lassen, als Verweisungen auf einen primitiven, allen Menschen vertrauten Denkkakt, der eine Auflösung in noch ursprünglichere Akte vielleicht weder fähig noch bedürftig ist”.

powstania antynomii i paradoksów? Tak było przecież z intuicyjnie rozumianym pojęciem zbioru, które doprowadziło do antynomii znanych już Cantorowi i wymusiło aksjomatyzację teorii mnogości. Aksjomatyzacja okazała się zresztą niejednoznaczna – powstały bowiem różne teorie mnogości, z których każda próbowała wyrazić w aksjomatach podstawowe intuicje związane z pojęciem zbioru (por. Murawski 1995, Dodatek I; zob. też Bedürftig, Murawski 2010, 2018).

Problem statusu i zasad doboru aksjomatów jest jednym z ważniejszych i trudniejszych w filozofii matematyki. W logice matematycznej i metamatematyce wypracowano podejście w duchu formalistycznym, wyraźnie odróżniające syntaktykę i semantykę. Zgodnie z tą koncepcją aksjomatem może być w zasadzie dowolna formuła w języku danej teorii, byle tylko układ aksjomatów stanowił system wewnętrznie niesprzeczny. Nie mówimy więc tu, że aksjomaty to zdania pewne, niepodważalne czy prawdziwe. Podobna dowolność panuje w zasadzie w przypadku doboru pojęć pierwotnych danej teorii. Pojęcia te są definiowane *implicite* przez aksjomaty, które traktować można jako definicje uwikłane pojęć pierwotnych. Powstaje oczywiście problem „naturalności” doboru pojęć pierwotnych i aksjomatów, gdy chcemy zaksjomatyzować daną dziedzinę wiedzy czy wiedzę dotyczącą danej struktury.

Poza uwagami metodologicznymi, które powyżej omówiliśmy, nie znajdujemy u Pascala innych systematycznych rozważań dotyczących filozofii matematyki. Mamy jedynie pojedyncze, oderwane uwagi w *Myślach*. Często są one „zanurzone” w rozważaniach natury teologicznej dotyczących Absolutu. Pascal próbuje opisać Absolut, używając języka i symboli matematycznych. Przywodzi to na myśl np. Mikołaja z Kuzy, u którego idee matematyczne i teologiczne były wzajemnie powiązane i który próbował wykorzystać terminologię matematyczną do wyjaśnienia pewnych idei teologicznych; i na odwrót – pewne idee i pojęcia biorące się z teologii i filozofii wykorzystywał, by wyrazić koncepcje dotyczące problemów i pytań natury filozoficznej związanych z matematyką (por. Murawski 2016, 2019, 1995; zob. też Bedürftig, Murawski 2010, 2018).

Zwróćmy tu przede wszystkim uwagę, że Pascal odróżnia wiedzę o istnieniu danej rzeczy od wiedzy o jej naturze. Zauważa, że znamy zarówno istnienie, jak i naturę skończoności. Znamy też istnienie nieskończoności, ale nie znamy jej natury. W *Myślach* pisał:

Wiemy, że istnieje nieskończoność, ale nie znamy jej natury. Wiemy na przykład, że fałszem jest, aby liczby były skończone; zatem prawdą jest, że istnieje nieskończoność w liczbie, ale nie wiemy, co to jest. Fałszem jest, aby była parzysta, fałszem, aby była nieparzysta: za dodaniem bowiem jedności nie zmieni swej natury; a wszelako jest to liczba, wszelka zaś liczba jest parzysta albo nieparzysta (prawda, iż odnosi się to do wszelkiej liczby skończonej).

[...]

Znamy tedy istnienie i naturę skończoności, ponieważ jesteśmy skończeni i rozciągli jak ona. Znamy istnienie nieskończoności, a nie znamy jej natury, ponieważ ma ona rozciągłość jak my, ale nie ma granic, jak my je mamy (Pascal 1972, fragm. 451, s. 194)³⁵.

Wyciąga też z tego wnioski dotyczące Boga. Mówi, że można wiedzieć, że Bóg istnieje, nie wiedząc jednocześnie, czym on jest. Twierdzi też, że w istocie nie znamy ani istnienia, ani natury Boga, bo nie ma on granic.

Pascal zestawia też skończoność i nieskończoność (trochę w duchu Mikołaja z Kuzy):

Jedność dodana do nieskończoności nie pomnaża jej ani o włos, tak jak stopa dodana do nieskończonej miary. Skończoność unicestwia się w obliczu nieskończoności i staje się czystą nicością (Pascal 1972, fragm. 451, s. 193)³⁶.

Warto też zwrócić uwagę na kilka refleksji zawartych we fragmentach 21 i 22 *Myśli*, w których Pascal porównuje, jak pisze, zmysł matematyczny i przyrodzoną bystrość oraz umysł matematyczny i logiczny. W jakiś sposób próbuje więc charakteryzować myślenie matematyczne i wskazywać na jego specyficzne cechy. Otóż zmysł matematyczny polega wedle Pascala na tym, że potrafi się znakomicie operować skomplikowanymi zasadami, nawet odległymi od potocznego doświadczenia, przyrodzona zaś bystrość pozwala z łatwością rozpoznawać zasady „pospolite i widoczne całemu światu” (*communs et devant les yeux de tout le monde*). Dochodzi do wniosku, że:

Każdy matematyk posiadałby wtedy bystrość, o ile miałby dobry wzrok, rozumuje bowiem trafnie na podstawie zasad, które zna; człowiek zaś o przyrodzonej bystrości byłby matematykiem, gdyby mógł nagiąć wzrok ku niezwykłym sobie zasadom matematyki.

Że niektórzy ludzie, z przyrodzenia bystrzy, nie są matematykami, wynika stąd, że niepodobna im nagiąć się do zasad matematyki; jeśli zaś matematycy nie posiadają zmysłu pospolitej bystrości, to stąd, że nie widzą tego, co mają przed sobą, i że przyzwyczajeni do jasnych i grubych zasad matematyki i do rozumowania jedynie po dokładnym widzeniu i roztrząśnięciu swoich zasad, gubią się w rzeczach subtelnej natury, których zasad nie da się uchwycić w podobny sposób (Pascal 1972, fragm. 21, s. 31)³⁷.

³⁵ „Nous connaissons qu’il y a un infini et ignorons sa nature. Comme nous savons qu’il est faux que les nombres soient finis, donc il est vrai qu’il y a un infini en nombre. Mais nous ne savons ce qu’il est : il est faux qu’il soit pair, il est faux qu’il soit impair ; car, en ajoutant l’unité, il ne change point de nature ; cependant, c’est un nombre et tout nombre est pair ou impair (il est vrai que cela s’entend de tout fini). [...] Nous connaissons donc l’existence et la nature du fini, parce que nous sommes finis et étendus comme lui. Nous connaissons l’existence de l’infini et ignorons sa nature, parce qu’il a étendue comme nous, mais non pas des bornes comme nous”.

³⁶ „L’unité jointe à l’infini ne l’augmente de rien, non plus qu’un pied à une mesure infinie. Le fini s’anéantit en présence de l’infini, et devient un pur néant”.

³⁷ „Tous les géomètres seraient donc fins s’ils avaient la vue bonne, car ils ne raisonnent pas faux sur les principes qu’ils connaissent ; et les esprits fins seraient géomètres, s’ils pouvaient plier leur vue vers les principes inaccoutumés de géométrie.

Pascal uważa, że właściwa matematykom tendencja do traktowania w sposób matematyczny wszelkich zagadnień, w szczególności wymagających wrodzonej bystrości, a przejawiająca się m.in. w zaczynaniu wszystkiego od ustalenia definicji i wyjściowych zasad, nie prowadzi do pozytywnych skutków, a matematycy „okrywają się śmiesznością” (*se rendent ridicules*) (tamże). I kończy swoje rozważania tak:

Matematycy będący jedynie matematykami mają wtedy umysł logiczny, ale pod warunkiem, że im się dobrze wyłoży wszystkie rzeczy wedle definicji i zasad; inaczej robią się bałamutni i niezdolni, umieją bowiem być logiczni jedynie na podstawie zupełnie jasnych zasad (Pascal 1972, fragm. 21, s. 32)³⁸.

Rozróżnia też umysł logiczny i umysł matematyczny. Umysł logiczny charakteryzuje się wedle niego zdolnością do głębokiego wnikania w konkretne nieliczne zasady i ich konsekwencje, umysł matematyczny jest zaś w stanie ogarnąć wielką liczbę zasad:

Są więc dwa rodzaje umysłów: jeden, który wnika żywo i głęboko w konsekwencje zasad, i to jest umysł logiczny; drugi, który zdolny jest ogarnąć wielką liczbę zasad nie gubiąc się w nich, i to jest umysł matematyczny. Jeden znamionuje siła i trafność, drugi szerokość zasięgu³⁹ (Pascal 1972, fragm. 22, s. 33).

I konkluduje, że można posiadać jedno bez drugiego, tzn. że umysł może cechować się siłą i jednocześnie pewną ciasnotą, ale może też być rozległy, a jednocześnie słaby.

Z omówionych powyżej dokonań Pascala wynika, że był to człowiek genialny. Już od dzieciństwa przejawiały się jego zdolności matematyczne. Przy tym nie tylko łatwo absorbował znane już informacje naukowe, ale też wykazywał się kreatywnością i samodzielnością – wystarczy wspomnieć przywołany na początku fakt, iż w wieku 12 lat samodzielnie odkrył wiele twierdzeń zawartych w *Elementach* Euklidesa. Nie zajmował się jednak żadną gałęzią

Ce qui fait donc que de certains esprits fins ne sont pas géomètres, c'est qu'ils ne peuvent du tout se tourner vers les principes de géométrie ; mais ce qui fait que des géomètres ne sont pas fins, c'est qu'ils ne voient pas ce qui est devant eux, et qu'étant accoutumés aux principes nets et grossiers de géométrie, et à ne raisonner qu'après avoir bien vu et manié leurs principes, ils se perdent dans les choses de finesse, où les principes ne se laissent pas ainsi manier”.

³⁸ „Les géomètres, qui ne sont que géomètres, ont donc l'esprit droit, mais pourvu qu'on leur explique bien toutes choses par définitions et principes ; autrement, ils sont faux et insupportables, car ils ne sont droits que sur les principes bien éclaircis”.

³⁹ „Il y a donc deux sortes d'esprits : l'une, de pénétrer vivement et profondément les conséquences des principes, et c'est là l'esprit de justesse ; l'autre, de comprendre un grand nombre de principes sans les confondre, et c'est là l'esprit de géométrie. L'un est force et droiture d'esprit, l'autre est amplitude d'esprit. Or l'un peut bien être sans l'autre, l'esprit pouvant être fort et étroit, et pouvant [être] aussi ample et faible”.

matematyki w sposób systematyczny. Będąc słabego zdrowia, nie mógł skoncentrować się na wyczerpującym i wszechstronnym rozwijaniu jakiejś dziedziny; jego talent i błyskotliwość były jakby rozproszone i przejawiały się we fragmentarycznych olśnieniach dotyczących pomysłów autorstwa innych. Niemniej jednak kilka jego osiągnięć na trwałe weszło do historii matematyki i zostało docenionych. Świadectwem tego są choćby terminy czy nazwy twierdzeń zawierające jego nazwisko – wymienimy więc tu choćby język programowania Pascal, maszynę paskalinę, twierdzenie Pascala, prostą Pascala, trójkąt Pascala czy rozkład Pascala. Jego rozważania filozoficzne nad matematyką czy ogólnie nad metodą naukową – choć „zanurzone” w nie do końca jasnych i miejscami mętnych rozważaniach religijno-teologiczno-metafizycznych – stanowiły niewątpliwie ważny krok w refleksji nad nauką. Pokazywały też znaczenie i wagę metod matematyki dla rozwoju wiedzy.

Bibliografia

- Bedürftig Th., Murawski R. (2010), *Philosophie der Mathematik*, Berlin – New York: Walter de Gruyter; wyd. II: Berlin – Boston 2012; wyd. III: Berlin – Boston 2015; wyd. IV: Berlin – Boston 2019.
- Bedürftig Th., Murawski R. (2018), *Philosophy of Mathematics*, Berlin – Boston: Walter de Gruyter.
- Bondecka-Krzykowska I. (2012), *Historia obliczeń. Od rachunku na palcach do maszyny analitycznej*, Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza.
- Borel É. (1905), *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*, Paris: Gauthier – Villars.
- Bosmans H. (1929), *Sur l'œuvre mathématique de Blaise Pascal*, „Revue des Questions Scientifiques” 5, s. 136–160, 424–450.
- Bourbaki N. (1969), *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris: Hermann; tłum. pol.: *Elementy historii matematyki*, przeł. S. Dobrzecki, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1980.
- Boyer C.B., Merzbach U.C. (1989), *A History of Mathematics*, wyd. II, New York: John Wiley & Sons.
- Felgner U. (2020), *Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit*, Basel: Birkhäuser.
- Hausdorff F. (1927), *Mengenlehre*, Berlin – Leipzig: Walter de Gruyter Verlag.
- Juszkiewicz A.P. (red.) (1976), *Historia matematyki*, t. II: *Matematyka XVII stulecia*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- Loeffel H. (1987), *Blaise Pascal 1623–1662*, Vita Mathematica 2, Basel – Boston: Birkhäuser Verlag.
- Marciszewski W., Murawski R. (1995), *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective*, Amsterdam – Atlanta, GA: Editions Rodopi.

- Murawski R. (1986), *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza; wyd. III: Poznań 2003.
- Murawski R. (1995), *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN; wyd. VI: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2017.
- Murawski R. (2016), *Between theology and mathematics. Nicolas of Cusa's philosophy of mathematics*, „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric” 44 (57), s. 97–110; przedruk w: R. Murawski, *Lógos and Máthēma 2. Studies in the Philosophy of Logic and Mathematics*, Peter Lang Internationaler Verlag der Wissenschaften, Berlin 2020, s. 71–82; tłum. pol.: *Między teologią a matematyką. Mikołaja z Kuzy filozofia matematyki*, w: R. Murawski, *Z historii logiki i filozofii matematyki*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2019, s. 147–158.
- Murawski R. (2019), *Mathematics and theology in the thought of Nicholas of Cusa*, „Logica Universalis” 13, s. 477–485.
- Pascal B. (1871), *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, w: tenże, *Œuvres complètes*, t. 3: *Physique, mathématiques*, Paris: Hachette, s. 163–182.
- Pascal B. (1897), *Pensées*, w: tenże, *Opuscules et Pensées*, red. L. Brunschvicg, Paris: Hachette.
- Pascal B. (1954), *Œuvres complètes*, red. J. Chevalier, Bibliothèque de la Pléiade, Paris: Éditions Gallimard.
- Pascal B. (1962), *Rozprawy i listy*, przeł. T. Boy-Żeleński, M. Tazbir, Warszawa: Instytut Wydawniczy Pax.
- Pascal B. (1972), *Mysli*, przeł. T. Boy-Żeleński, Warszawa: Instytut Wydawniczy Pax.
- Pascal B. (1979), *L'Esprit de géométrie et De l'art de persuader. Textes et commentaires*, red. B. Clerté, M. Lhoste-Navarre, Paris: Éditions Pédagogie moderne.
- Poisson S.-D. (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, Paris: Bachelier, Imprimeur-Libraire.

Blaise Pascal – Mathematician and Philosopher of Mathematics

Keywords: *calculating machine, conic section, definition, mathematics, B. Pascal, Pascal's triangle, philosophy of mathematics, probability, proof*

The paper is devoted to Blaise Pascal perceived as a mathematician and a philosopher of mathematics. The following of his mathematical achievements have been presented: the theorem on a hexagon inscribed in a conic, his idea of a calculating machine, the arithmetical triangle, his works connected with the probability theory as well as his ideas connected with the infinitesimal calculus. Historical context of his results and their impact are discussed. Also Pascal's considerations about mathematics as a science have been presented. His main philosophical theses concern methods of mathematics as well as dispersed remarks on the infinity and on types of mathematical thinking are surveyed.